

© Авторы, 2025 г.  
Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution License 4.0 International (CC BY 4.0)



© The Authors, 2025.  
Content is available under Creative Commons Attribution License 4.0 International (CC BY 4.0)

## КРАТКОЕ СООБЩЕНИЕ

УДК 550.34.01

<https://doi.org/10.30730/gtr.2025.9.1.066-072>  
<https://www.elibrary.ru/xuvcpw>

## О траекториях динамической системы Селькова, описывающей автоколебания источников микросейсм

В. Б. Глячев<sup>@</sup>, Д. С. Ушко

<sup>@E-mail:</sup> [tyachev@adygnet.ru](mailto:tyachev@adygnet.ru)

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия

**Резюме.** Рассмотрены некоторые аспекты автоколебаний источников микросейсм, представленные математической моделью гликолиза Селькова. Работа уточняет некоторые выводы, сделанные в ранее опубликованной в журнале «Геосистемы переходных зон» статье. В частности, показано, что динамическая система, моделирующая микросейсм, имеет единственное состояние равновесия, местоположение которого меняется в ограниченной части фазовой плоскости в зависимости от значений параметра, характеризующего концентрацию трещин. Доказано, что система имеет простой неустойчивый узел или фокус, окруженный хотя бы одним устойчивым предельным циклом.

**Ключевые слова:** микросейсм, модель Селькова, автоколебания, круг Пуанкаре, состояние равновесия, ось концентрации трещин

## On the trajectories of the Selkov dynamic system describing the self-oscillation of microseism sources

Vyacheslav B. Tlachev<sup>@</sup>, Damir S. Ushkho

<sup>@E-mail:</sup> [tyachev@adygnet.ru](mailto:tyachev@adygnet.ru)

Adyghe State University, Maykop, Russia

**Abstract.** Some aspects of the self-oscillation of microseismic sources represented by the Selkov mathematical model for glycolysis were reviewed. The paper clarifies some of the conclusions made in a previously published article in the journal “Geosystems of Transition Zones.” In particular, it was shown that the dynamic system that models microseisms has only one equilibrium state, the location of which in a bounded part of the phase plane varies depending on the values of the parameter characterizing the fracture concentration. It was proved that the system has a simple unstable node or focus surrounded by at least one stable limit cycle.

**Keywords:** microseisms, Selkov model, auto-oscillation, Poincaré’s disk, equilibrium state, crack concentration axis

**Для цитирования:** Глячев В.Б., Ушко Д.С. О траекториях динамической системы Селькова, описывающей автоколебания источников микросейсм. *Геосистемы переходных зон*, 2025, т. 9, № 1, с. 66–72. <https://doi.org/10.30730/gtr.2025.9.1.066-072>; <https://www.elibrary.ru/xuvcpw>

**For citation:** Tlachev V.B., Ushkho D.S. On the trajectories of the Selkov dynamic system describing the self-oscillation of microseism sources. *Geosistemy perexodnykh zon = Geosystems of Transition Zones*, 2025, vol. 9, No. 1, pp. 66–72. (In Russ., abstr. in Engl.). <https://doi.org/10.30730/gtr.2025.9.1.066-072>; <https://www.elibrary.ru/xuvcpw>

### Благодарности

Авторы благодарны рецензенту за внимательное прочтение работы и полезные замечания.

### Acknowledgements

The authors are grateful to the Reviewer for careful reading of this paper and helpful comments.

## Введение и постановка задачи

Построение и использование математических моделей в различных науках существенно расширяют инструментарий и доказательность исследуемых процессов и явлений природы. В работе [1] впервые к исследованию геологических процессов применена математическая модель Селькова. Отметим, что указанная статья опубликована с примечанием о дискуссионности. Авторам [1] удалось описать взаимодействие между двумя видами трещин системой нелинейных уравнений Селькова [2]. При этом они не только достаточно подробно и ясно обосновали построение математической модели в области теории землетрясений, но и детально исследовали процессы генерации микросейсм, закономерности, которые им присущи. Это весьма важно в прикладном аспекте. Компьютерное моделирование позволило авторам исследовать процесс образования автоволн источников микросейсм. Однако, как известно, компьютерное (численное) моделирование не позволяет в наиболее общем виде исследовать все зависимости процесса от параметров. Для этого существуют определенные математические теории, в частности качественная теория дифференциальных уравнений [3].

Отметим, что модель Селькова развивается, появляются ее аналоги с более широким спектром использования, например модели Слинько и Чумакова–Слинько [7–9]. Кроме того, следует отметить хорошо зарекомендовавшие себя при исследовании различных процессов кинетические уравнения, которые являются альтернативой системе Селькова, – это уравнения моделей Гинзбурга–Ландау или Ландау–Халатникова (см., например, [10, 11] и цитированную в них литературу).

В данной заметке представлен математически строгий анализ поведения решений уравнений Селькова вблизи особых точек, основанный на теории динамических систем, и доказательство некоторых утверждений, которые не получили определенного (должного) освещения в работе [1].

Авторами работы [1] отмечается, что автоколебания источников микросейсм наиболее полно описываются моделью гликолиза Селькова [2], которую в безразмерных величинах можно представить в виде следующей автономной системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + ay + bx^2y, \\ \frac{dy}{dt} = c - ay - bx^2y, \end{cases} \quad (1)$$

где  $a > 0, b > 0, c > 0, x(t)$  – величина, представляющая собой концентрацию трещин небольшой длины, которые являются источниками роста более крупных трещин;  $y(t)$  – концентрация сравнительно крупных трещин, которые формируют сигналы микросейсм.

Для системы (1) точка  $F\left(c; \frac{c}{a+bc^2}\right)$  в ограниченной части фазовой плоскости является состоянием равновесия. При переносе начала координат в точку  $F$  система (1) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{bc^2 - a}{a + bc^2}x + (a + bc^2)y + \frac{bc}{a + bc^2}x^2 + 2bcxy + bx^2y, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{-2bc^2}{a + bc^2}x - (a + bc^2)y - \frac{bc}{a + bc^2}x^2 - 2bcxy - bx^2y. \end{cases} \quad (2)$$

Следуя положениям монографии [3], с целью установления характера состояния равновесия  $F$  определим для системы (2) величины:  $\sigma$  – дивергенцию векторного поля этой системы в точке  $(0;0)$  и определитель  $\Delta$ , составленный из коэффициентов ее линейных членов:

$$\sigma = \frac{-b^2c^4 + (b - 2ab)c^2 - a - a^2}{\Delta}, \quad \Delta = a + bc^2. \quad (3)$$

Из (3) видно, что  $\Delta > 0$ . Корнями уравнения  $\sigma = 0$  относительно  $c$  являются выражения

$$c_1 = \sqrt{\frac{1 - 2a - \sqrt{1 - 8a}}{2b}} \quad \text{и} \quad c_2 = \sqrt{\frac{1 - 2a + \sqrt{1 - 8a}}{2b}},$$

где  $0 < a < \frac{1}{8}$ .

**Замечание 1.** В данной работе рассматриваются только вещественные корни, что важно с точки зрения реальных приложений.

С помощью преобразований Пуанкаре [3] исследуем поведение траекторий системы (1) в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости в целях установления характера их расположения в ограниченной части плоскости. В частности, результаты такого исследования нами используются в качестве инструмента для решения проблемы центра-фокуса применительно к состоянию равновесия  $F$ , а также доказательства существования предельного цикла вокруг  $F$ .

## Результаты исследования

Для решения проблемы центра-фокуса точки  $F$  необходимо рассмотреть поведение траекторий системы (1) в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости. Это осуществляется с помощью преобразований Пуанкаре [3]. В нашем случае преобразование Пуанкаре вида  $\{x=1/z, y=u/z\}$  переводит систему (1) в новую систему вида:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -bu - bu^2 + (1-a)uz^2 + cz^3 - au^2z^2 \equiv P(u, z), \\ \frac{dz}{dt} = -buz + z^3 - auz^3 \equiv Q(u, z). \end{cases} \quad (4)$$

Состояниями равновесия системы (4) при условии  $z = 0$  являются точки:  $W_1(u = 0; z = 0)$ ,  $W_2(u = -1; z = 0)$ .

Переход к новым координатам с помощью формул  $(x=v/z, y=1/z)$  позволяет перевести систему (1) в систему вида:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = bv^2 + az^2 + bv^3 + (a-1)vz^2 - cvz^3, \\ \frac{dz}{dt} = bv^2z + az^3 - cz^4. \end{cases} \quad (5)$$

**Замечание 2** [3]. Система (5), полученная из системы (1), рассматривается только с целью установления характера состояния равновесия  $(0;0)$ .

В случае  $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{\substack{v=0 \\ z=0}} \neq 0$  все бесконечно уда-

ленные состояния равновесия системы (1)

удовлетворяют системе  $\begin{cases} z = 0, \\ P(u, z) = 0. \end{cases}$  Тогда оче-

видно, что система (1) имеет только три бесконечно удаленных состояния равновесия:  $W_1(u = 0; z = 0)$ ,  $W_2(u = -1; z = 0)$ ,  $W_3(v = 0; z = 0)$ , из которых точка  $W_1$  представляет собой сложное состояние равновесия, для которого  $\sigma = -b \neq 0$ .

Применим к системе (4) преобразование  $\begin{cases} \bar{u} = z, \\ \bar{z} = u, \end{cases}$  которое приводит ее к новой системе:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{dt} = -b\bar{u}\bar{z} + \bar{u}^3 - a\bar{u}^3\bar{z}, \\ \frac{d\bar{z}}{dt} = -b\bar{z} - b\bar{z}^2 + (1-a)\bar{u}^2\bar{z} + c\bar{u}^3 - a\bar{u}^2\bar{z}^2. \end{cases} \quad (6)$$

Изменим масштаб времени в системе (6) по формуле  $\tau = -bt$ :

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}}{d\tau} = \bar{u}\bar{z} - \frac{1}{b}\bar{u}^3 + \frac{a}{b}\bar{u}^3\bar{z} \equiv P_2(\bar{u}, \bar{z}), \\ \frac{d\bar{z}}{d\tau} = \bar{z} + \bar{z}^2 + \frac{(a-1)}{b}\bar{u}^2\bar{z} - \frac{c}{b}\bar{u}^3 + \frac{a}{b}\bar{u}^2\bar{z}^2 \equiv \bar{z} + Q_2(\bar{u}, \bar{z}). \end{cases} \quad (7)$$

Для того чтобы установить расположение траекторий системы (7) в достаточно малой окрестности состояния равновесия  $(0;0)$ , находим решение уравнения  $\bar{z} + Q_2(\bar{u}, \bar{z}) = 0$  относительно  $\bar{z}$  в виде следующего степенного ряда:  $\bar{z} = \varphi(\bar{u}) = \frac{c}{b}(\bar{u})^3 + \frac{c(1-a)}{b^2}(\bar{u})^5 \dots$ , который позволяет получить выражение

$$P_2(\bar{u}, \varphi(\bar{u})) = -\frac{1}{b}(\bar{u})^3 + \frac{c}{b}(\bar{u})^4 \dots \quad (8)$$

Из (8) по теореме 65 [3] следует, что точка  $W_1$  – это топологическое седло, достаточно малая окрестность которого состоит из четырех гиперболических секторов.

Прямыми вычислениями можно показать, что точка  $W_2$  – простой неустойчивый узел.

Благодаря тому факту, что правые части уравнений системы (5) не содержат линейных членов (вторая, третья и четвертая степени), тип состояния равновесия точки  $W_3$  можно определить по методу Фроммера [4].

Рассмотрим дифференциальное уравнение траекторий для системы (5) в виде

$$\frac{dz}{dv} = \frac{bv^2z + az^3 - cz^4}{bv^2 + az^2 + bv^3 + (a-1)vz^2 - cvz^3}. \quad (9)$$

Введем обозначения:

$$\bar{P}_3(v, z) = bv^2z + az^3, \quad \bar{Q}_2(v, z) = bv^2 + az^2. \quad (10)$$

По терминологии [4] направления, вдоль которых интегральные кривые могут входить в особую точку (0;0) уравнения (9), называются критическими. Критические направления находим с учетом (10) при решении уравнения  $z \cdot \bar{Q}_2(v, z) = 0$  [4]. Единственным вещественным корнем данного уравнения является  $z = 0$ , так как  $a = 0, b = 0$ . По классификации [4]  $z = 0$  – обыкновенное простое критическое направление. Далее, следуя [4], рассмотрим функцию

$$\psi(u, v) = \frac{bv^2z + az^3 - cz^4}{bv^2 + az^2 + bv^3 + (a-1)vz^2 - cvz^3} - u, \quad (11)$$

где  $z = uv$ . Подставляя это значение  $z$ , имеем:

$$\psi(u, v) = \frac{bvuv + avu^3 - bu - au^3 - bvu - (a-1)vuv^3}{b + au^2 + bv + (a-1)vuv^2 - cv^2u^3}. \quad (12)$$

Из (12) следует, что  $\psi(u, 0) = -u$ , то есть

$$\psi'_u(0, 0) = -1. \quad (13)$$

Согласно [4], равенство (13) свидетельствует о том, что только одна интегральная кривая уравнения (9) проходит через особую точку (0;0). Тем самым нами показано, что к состоянию равновесия  $W_3$  системы (5) примыкают только две траектории: одна при  $t \rightarrow +\infty$ , а другая – при  $t \rightarrow -\infty$ , обе совпадают с экватором  $z = 0$  сферы Пуанкаре. Таким образом, достаточно малая окрестность точки  $W_3$  состоит из

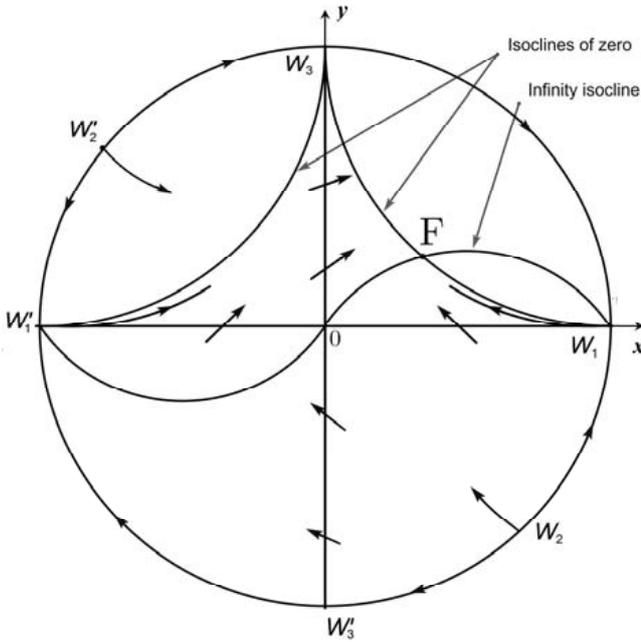
двух гиперболических секторов, ограниченных одной  $\omega$ -сепаратрисой и одной  $\alpha$ -сепаратрисой, поэтому справедливо следующее утверждение:

**Утверждение 1.** Если  $c \neq 0, a > 0, b > 0$ , то система (1) имеет на экваторе сферы Пуанкаре три состояния равновесия:  $W_1$  ( $u = 0; z = 0$ ) – сложное (топологическое) седло, окрестность которого состоит из четырех гиперболических секторов;  $W_2$  ( $u = -1; z = 0$ ) – простой неустойчивый узел;  $W_3$  ( $v = 0; z = 0$ ) – сложное состояние равновесия, окрестность которого состоит из двух гиперболических секторов.

Рассмотрим теперь свойства состояния равновесия  $F\left(c; \frac{c}{a + bc^2}\right)$ . Так как, согласно (3),  $\Delta > 0$ , то начало координат системы (2) является простым состоянием равновесия типа «узел», «фокус» или «центр» [3, 5]. Если при этом  $c \in (0; c_1) \cup (c_2; +\infty)$ , то  $\sigma < 0$ , следовательно, точка (0;0) – простой устойчивый узел, или фокус (по терминологии [5] топологический узел); если  $c \in (c_1; c_2)$ , то точка с координатами (0;0) – простой неустойчивый топологический узел; если  $c = c_1$  или  $c = c_2$ , то точка (0;0) – негрубый фокус или центр [3, 6]. К сожалению, в настоящее время в теории динамических систем для систем вида (2) нет необходимых и достаточных коэффициентных условий центра с чисто мнимыми характеристическими числами. В нашем случае проведенное выше исследование поведения траекторий системы (1) в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости позволяет утверждать, что в рассматриваемом случае состояние равновесия  $F$  не может быть центром.

Обратимся к рис. 1, на котором изображены главные изоклины системы (1) в круге Пуанкаре.

Так как  $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{y=0} = c, \left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=0} = au$  и параметры  $a, c$  положительны, то ось  $ox$  и полуоси оси  $ou$  являются трансверсальными по отношению к вектору поля системы (1). В соответствии с рис. 1 дуга любой траектории системы (1), расположенной в ограниченной части фа-



**Рис. 1.** Прямая  $y = 0$  и полуоси вертикальной оси координат являются трансверсальями по отношению к траекториям системы (1).  $\alpha$ -сепаратрисы седла  $W_1$  целиком расположены в верхней полуплоскости.

**Fig. 1.** The straight line  $y = 0$  and the semi-axes of the vertical coordinate axis are transversals with respect to the trajectories of the system (1). The  $\alpha$ -separatrices of saddle point  $W_1$  are entirely located in the upper half-plane.

зовой плоскости, при  $t \rightarrow +\infty$  находится в первом квадранте. Так как к состоянию равновесия  $W_3$  примыкают лишь две траектории:  $\omega$ - и  $\alpha$ -сепаратрисы, совпадающие с экватором сферы Пуанкаре, то никакая положительная полутраектория системы (1) при  $t \geq T$ , где  $T$  – сколь угодно большое положительное число, не входит ни в одну из точек  $W_1$  и  $W_3$ . Если взять произвольную положительную полутраекторию  $L^+$ , пересекающую ось ординат, то, согласно монографии [5, с. 52], для  $L^+$  существует  $\omega$ -предельное множество, которое может быть одного из трех типов: одно состояние равновесия; одна замкнутая траектория; совокупность состояний равновесия и траекторий, стремящихся к этим состояниям равновесия как при  $t \rightarrow +\infty$ , так и при  $t \rightarrow -\infty$ . Однако предположение о существовании центра в точке  $F$  допускает наличие у системы (1) хотя бы одного состояния равновесия, отличного от  $F$ . Таким образом, при  $c = c_1$  или  $c = c_2$  точка  $F$  – негрубый фокус, причем устойчивый. При  $c \in (c_1; c_2)$

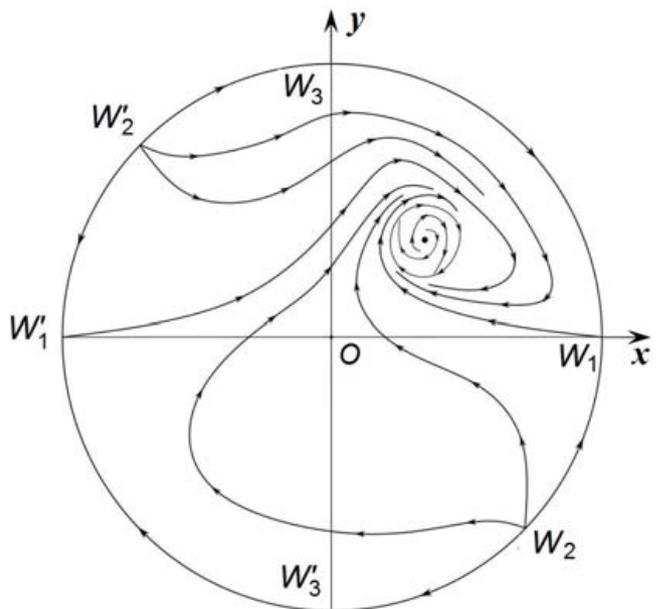
предельное множество для положительной полутраектории  $L^+$  представляет собой устойчивый предельный цикл. Поэтому можно сформулировать следующее утверждение.

**Утверждение 2.** Если  $0 < a < 1/8$ ,  $c \in (c_1; c_2)$ , то в ограниченной части фазовой плоскости система (1) имеет простой неустойчивый узел, или фокус, окруженный хотя бы одним устойчивым предельным циклом.

Фазовый портрет системы (1) изображен на рис. 2.

**Замечание 3.** Наличие грубых устойчивых предельных циклов на фазовой плоскости является определяющим признаком автоколебательной системы. Следовательно, изученная система (1) действительно является математической моделью реальной автоколебательной системы [2].

**Замечание 4.** Придерживаясь терминологии, принятой в современной качественной теории динамических систем второго порядка, точку  $(0;0)$  мы называем состоянием равновесия системы (5), а для дифференциального уравнения (9) траекторий этой же системы – особой точкой.



**Рис. 2.** Расположение траекторий системы (1) в круге Пуанкаре, т.е. на всей фазовой плоскости.

**Fig. 2.** The location of the trajectories of the system (1) in the Poincaré disk, i.e., on the entire phase plane.

## Заключение

В работе установлен характер сложного состояния равновесия на бесконечности, что способствует доказательству наличия хотя бы одного устойчивого предельного цикла, окружающего единственное состояние равновесия в ограниченной части фазовой плоскости.

Наличие предельного цикла можно интерпретировать таким образом, что периодические изменения уровня микросейсм не обязательно связаны с внешними факторами (сезонностью). Такие изменения могут происходить по внутренним причинам (ввиду природы их источников – трещин). Хотя неочевидно, что источники микросейсм именно трещины, а не межзеренные подвижки в неоднородной среде.

Кроме этого, отметим следующее:

1) утверждение авторов [1] о том, что система (6) [1], а в нашем случае система (1) может иметь два состояния равновесия, ошибочно. Изменение параметра  $\nu$  (см. (6) [1]), а в данной работе параметра  $c$  приводит только лишь к изменению местоположения единственного состояния равновесия в ограниченной части фазовой плоскости;

2) на рис. 2 статьи [1] траектория пересекает ось концентраций  $tr$ -трещин дважды, что невозможно в силу трансверсальности оси  $ox$  для траекторий системы;

3) в формуле (18) статьи [1] имеется неточность, правильное ее написание таково:

$$\nu_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 - 2a \pm \sqrt{1 - 8a}}{b}}.$$

## Список литературы

1. Маковецкий В.И., Дудченко И.П., Закупин А.С. **2017**. Автоколебательная модель источников микросейсм. *Геосистемы переходных зон*, 1(4): 37–46. <https://doi.org/10.30730/2541-8912.2017.1.4.037-046>
2. Сельков Е.Е. **1967**. О возможности возникновения автоколебаний в ферментных реакциях с субстратным и продуктивным угнетением. В кн.: *Колебательные процессы в биологических и химических системах*: сб. тр. Всесоюз. симпозиума по колебательным процессам в биологических химических

системах, Пущино-на-Оке, 21–26 марта 1966 г. М.: Наука, с. 93–112.

3. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. **1966**. *Качественная теория динамических систем второго порядка*. М.: Наука, 568 с.
4. Фроммер М. **1941**. Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер. *Успехи математических наук*, 9: 212–253.
5. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. **1976**. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости*. М.: Наука, 496 с.
6. Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. **1982**. *Нелинейные колебания в системах второго порядка*. Минск: Изд-во БГУ, 208 с.
7. Лашина Е.А., Чумаков Г.А., Чумакова Н.А. **2005**. Максимальные семейства периодических решений кинетической модели гетерогенной каталитической реакции. *Вестник НГУ. Серия: Математика. Механика. Информатика*, 5(4): 42–59. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/vngu219> (дата обращения 13.02.2025).
8. Чумаков Г.А. **2007**. Динамика нелинейной системы дифференциальных уравнений. *Сибирский математический журнал*, 48(5): 1180–1195.
9. Потапов В.И. **2011**. О бифуркациях в динамической системе Чумакова–Слинько. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*, 2(1): 146–155.
10. Mukherjee S., Basu A. **2022**. Statistical mechanics of phase transitions in elastic media with vanishing thermal expansion. *Physical Review E*, 106, 054128. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.106.054128>
11. Глячев В.Б., Ушко Д.С. **2024**. Поведение решений динамической системы, моделирующей плоскую упругую среду в рамках теории Гинзбурга–Ландау. *Труды Физического общества Республики Адыгея*, 29: 20–25. <https://trudy.fora01.ru/files/344/3-2024.pdf> (дата обращения 13.02.2025).

## References

1. Makovetsky V.I., Dudchenko I.P., Zakupin A.S. **2017**. Autooscillation model of microseism's sources. *Geosistemy perexodnykh zon = Geosystems of Transition Zones*, 1(4): 37–46. (In Russ.). <https://doi.org/10.30730/2541-8912.2017.1.4.037-046>
2. Selkov E.E. **1967**. [On the possibility of self-oscillations in enzyme reactions with substrate and productive repression]. In: [*Oscillatory processes in biological and chemical systems: Proceedings of the All-Union symposium on oscillatory processes in biological*

- chemical systems*], Pushchino-na-Oke, March 21–26, 1966. Moscow: Nauka, p. 93–112. (In Russ.).
3. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Maier A.L. **1973**. *Qualitative theory of second-order dynamic systems*. New York, Toronto: John-Wiley, 548 p. (In Engl., Russ.). URL: <https://archive.org/details/qualitativetheor0000unse/page/n9/mode/2up> (accessed 28.11.2024).
  4. Frommer M. **1928**. Die Integralkurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen. *Mathematische Annalen*, 99(1): 222–272. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-41390-6>
  5. Bautin N.N., Leontovich E.A. **1976**. [*Methods and techniques for qualitative research of dynamical systems on a plane*]. Moscow: Nauka, 496 p. (In Russ.).
  6. Amelkin V.V., Lukashevich N.A., Sadovsky A.P. **1982**. [*Nonlinear oscillations in second-order systems*]. Minsk: Publ. house of the BSU, 208 p. (In Russ.).
  7. Lashina E.A., Chumakov G.A., Chumakova N.A. **2005**. Maximal families of periodic solutions in a kinetic model of heterogeneous catalytic reaction. *Vestnik Novosibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematika, Mekhanika, Informatika*, 5(4): 42–59. (In Russ.). URL: <https://www.mathnet.ru/rus/vngu219> (accessed 13.02.2025).
  8. Chumakov G.A. **2007**. Dynamics of a system of nonlinear differential equations. *Siberian Mathematical Journal*, 48(5): 949–960. <https://doi.org/10.1007/s11202-007-0098-x>
  9. Potapov V.I. **2011**. On bifurcations in dynamical Slinko-Chumakov system. *Bulletin of the Nizhny Novgorod Lobachevsky University*, 2(1): 146–155. (In Russ.).
  10. Mukherjee S., Basu A. **2022**. Statistical mechanics of phase transitions in elastic media with vanishing thermal expansion. *Physical Review E*, 106, 054128. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.106.054128>
  11. Tlachev V.B., Ushkho D.S. **2024**. The behavior of dynamical system solutions modeling a flat elastic medium in the framework of the Ginzburg–Landau theory. *Works of the Adygheya Republic Physical Society*, 29: 20–25. (In Russ.). URL: <https://trudy.fora01.ru/files/344/3-2024.pdf> (accessed 13.02.2025).

## Об авторах

**Тлячев Вячеслав Бесланович** (<https://orcid.org/0000-0001-6431-316X>), доктор физико-математических наук, доцент, кафедра теоретической физики, Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия, [tlyachev@adygnet.ru](mailto:tlyachev@adygnet.ru)

**Ушко Дамир Салихович** (<https://orcid.org/0000-0002-1311-5785>), кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа, Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия, [damirubyh@mail.ru](mailto:damirubyh@mail.ru)

## About the Authors

**Tlachev, Vyacheslav B.** (<https://orcid.org/0000-0001-6431-316X>), Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of theoretical physics, Adyghe State University, Maykop, Russia, [tlyachev@adygnet.ru](mailto:tlyachev@adygnet.ru)

**Ushkho, Damir S.** (<https://orcid.org/0000-0002-1311-5785>), Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of mathematical analysis, Adyghe State University, Maykop, Russia, [damirubyh@mail.ru](mailto:damirubyh@mail.ru)

Поступила 24.02.2025

Принята к публикации 06.03.2025

Received 24 February 2025

Accepted 6 March 2025