

© Автор, 2025 г.
Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution
License 4.0 International (CC BY 4.0)



© The Author, 2025.
Content is available under Creative Commons Attribution
License 4.0 International (CC BY 4.0)

УДК 532.5.031+550.344.42+551.466.62

<https://doi.org/10.30730/gtr.2025.0.wif-2>

<https://elibrary.ru/loobm>

<http://journal.imgg.ru/web/full/f2025-0-2.pdf> (In Russian)

<http://journal.imgg.ru/web/full/f-e2025-0-2.pdf> (In English)

Волны в слое жидкости, возбуждаемые вариациями давления над свободной поверхностью

Ю. П. Королёв

E-mail: Yu_P_K@mail.ru

Институт морской геологии и геофизики ДВО РАН, г. Южно-Сахалинск, Россия

Резюме. Целью работы являлось исследование задачи о волнах в слое несжимаемой жидкости постоянной глубины. Интерес к задаче возник в связи с возбуждением и распространением поверхностных волн в Тихом океане в результате мощного эксплозивного извержения вулкана Хунга Тонга–Хунга Хаапай 15.01.2022. Рассматривались потенциальные движения жидкости. Возмущения задавались в виде кратковременного импульса давления над свободной поверхностью и в виде волн давления, возникающих в результате распада начальной области повышенного давления в атмосфере (волн Лэмба). Получены решения для вынужденных и свободных волн на поверхности, а также вынужденных и свободных волн давления на дне слоя жидкости. В приближении длинных волн амплитуды свободных поверхностных волн и амплитуды свободных волн придонного давления (в метрах водяного столба) совпадают, в то время как амплитуды вынужденных волн придонного давления выше амплитуд вынужденных поверхностных волн. В случаях, когда в записи давления присутствует только вынужденная составляющая, применение корректирующего множителя дает адекватный результат для поверхностных волн. Если в записи присутствуют обе компоненты (вынужденная и свободная), применение поправочного коэффициента неправомерно, поскольку разделить составляющие невозможно. Оценка амплитуд поверхностных волн по данным о давлении на дне может давать неадекватный результат. Полученные результаты обсуждаются в связи с оперативным прогнозом цунами по данным донных станций измерения уровня океана. Сформулировано предложение о возможном способе адекватной оценки амплитуды поверхностных волн при возбуждении их движущейся областью переменного давления.

Ключевые слова: волны на воде, волны Лэмба, вынужденные волны, барические волны, свободные волны, гравитационные волны, цунами, измерения уровня океана, оперативный прогноз цунами, службы предупреждения о цунами, Тихий океан

Waves in a fluid layer excited by pressure variations above the free surface

Yury P. Korolev

E-mail: Yu_P_K@mail.ru

Institute of Marine Geology and Geophysics, FEB RAS, Yuzhno-Sakhalinsk, Russia

Abstract. The aim of the paper was to study the problem of waves in a layer of incompressible fluid of constant depth. The interest in the problem arose due to the excitation and propagation of surface waves in the Pacific Ocean as a result of the powerful explosive eruption of the Hunga Tonga–Hunga Haapai volcano on January 15, 2022. Potential fluid motions were considered. The disturbances were induced in the form of a short-term pressure pulse above the free surface and in the form of pressure waves arising due to the disintegration of the initial region of high pressure in the atmosphere (Lamb waves). Solutions were obtained for forced and free waves on the surface, as well as for forced and free pressure waves at the bottom of the fluid layer. In the long-wave approximation, the amplitudes of free surface waves and the amplitudes of free bottom pressure waves (in meters of water column) coincide, while the amplitudes of forced bottom pressure waves are greater than the amplitudes of forced surface waves. In cases where only the forced component is present in the pressure record, the use of a correction factor gives an adequate result for surface waves.

If both components (forced and free) are present in the record, the use of the correction factor is unjustified, since it is impossible to separate the components. The estimation of surface wave amplitudes based on bottom pressure data may yield inadequate results. The results obtained are discussed in connection with the operational tsunami forecast based on the data from bottom sea level measurement stations. A proposal is formulated on a possible method for adequately estimating the amplitude of surface waves when excited by a moving region of variable pressure.

Keywords: water waves, Lamb waves, forced waves, baric waves, free waves, gravity waves, tsunamis, sea level measurements, operational tsunami forecast, tsunami warning services, Pacific Ocean

Для цитирования: Королёв Ю.П. Волны в слое жидкости, возбуждаемые вариациями давления над свободной поверхностью. *Геосистемы переходных зон*, 2025. <https://doi.org/10.30730/gtr.2025.0.wif-2>; <https://www.elibrary.ru/loobrn>

For citation: Korolev Yu.P. Waves in a fluid layer excited by pressure variations above the free surface. *Geosistemy perekhodnykh zon = Geosystems of Transition Zones*, 2025. <https://doi.org/10.30730/gtr.2025.0.wif-2>; <https://www.elibrary.ru/loobrn>

Введение

Произошедшее 15 января 2022 г. в южной части Тихого океана мощное эксплозивное извержение вулкана Хунга Тонга–Хунга Хаапай¹ оценивается как крупнейшее извержение подводного вулкана за почти полтора столетия с момента катастрофического разрушения о. Кракатау в 1883 г. [1]. Эффект от взрыва наблюдался во всех средах: ионосфере, атмосфере, в толще океана и на его поверхности и в земной коре [2–6].

Образовавшееся в результате извержения вулкана цунами вызвало катастрофические заплески на ближних островах архипелага Тонга с максимальной высотой до 22 м. Цунами нанесло ущерб не только ближайшим островным государствам, но также странам тихоокеанского побережья. Зарегистрированы заплески до 1.3 м в Японии, выше 3.5 м в Калифорнии, около 1 м в Чили и до 1 м в Перу (<https://www.ngdc.noaa.gov/hazel/view/hazards/tsunami/event-search>).

В результате взрыва вулкана образовалась волна повышенного давления в атмосфере (называемая также волной Лэмба), зарегистрированная множеством наземных барографов по всему земному шару. Волна повышенного давления, распространявшаяся со скоростью, близкой к скорости звука в атмосфере, вызвала возмущения свободной поверхности океана

в виде вынужденной волны, движущейся с той же скоростью. Такую волну будем называть барической. Быстрое (взрывное) изменение атмосферного давления само по себе является источником гравитационных волн на водной поверхности. Другие процессы в очаге извержения, приводящие к изменениям уровня поверхности воды, также вызывают гравитационные (свободные) волны в океане, распространяющиеся со скоростью длинных волн. В любом случае поверхностные волны представляют собой суперпозицию барических и гравитационных волн после прихода последних в точку наблюдения. Барическая и/или гравитационная волны зарегистрированы множеством глубоководных донных станций системы DART (Deep-ocean Assessment and Reporting of Tsunamis)² в Тихом океане³. Обе волны, барическая и гравитационная, полностью, от момента вступления барической волны, зарегистрированы небольшим количеством станций DART. Амплитуды барической и гравитационной волн сопоставимы даже на больших расстояниях от извержения. Изменение амплитуды барических волн обратно пропорционально квадратному корню из расстояния от источника [7], как и изменение амплитуды гравитационных волн. Волны такого типа, цилиндрические волны, описываемые в пространстве двух переменных, имеют передний фронт, но не имеют

¹ NOAA National Centers for Environmental Information. URL: <https://www.ngdc.noaa.gov/hazel/view/hazards/tsunami/event-search> (дата обращения: 08.04.2025).

² NOAA Center for Tsunami Research: DART. URL: <http://nctr.pmel.noaa.gov/Dart> (дата обращения: 08.04.2025).

³ National Data Buoy Center. URL: https://ndbc.noaa.gov/to_station.shtml (дата обращения: 08.04.2025).

заднего, колебания за фронтом продолжают достаточно долго [8]. Хотя гравитационная волна заметно отстает от барической, с ее приходом происходит суперпозиция гравитационной и барической волн.

Различные явления в атмосфере, на поверхности и на дне океана, сопровождавшие взрыв вулкана, рассмотрены в многочисленных работах. В работе [9] обсуждались процессы, произошедшие в очаге. Предполагалось, что в области вулкана в течение получаса-часа произошло пять взрывов разной интенсивности. Волны давления в атмосфере по натурным данным анализировались в работах [3, 10]. В статье [7] проанализированы данные множества наземных барографов, установлено, что волна давления в атмосфере (волна Лэмба) распространялась со скоростью 317 м/с, ее амплитуда уменьшалась с расстоянием от взрыва как $r^{-1/2}$, выполнено численное моделирование волн давления на основе специально построенного источника. Близкая оценка скорости распространения волны Лэмба 312 м/с получена в [11]. Влияние атмосферных волн давления на генерацию волн на поверхности океана на основе численного моделирования рассмотрено в работах [4, 7, 12–17], а также на сайте NOAA Center for Tsunami Research⁴. В работе [4] отмечались различия в амплитудах волн придонного давления и поверхностных волн. Генерация гравитационных волн в результате возмущений водной поверхности в очаге в численной модели рассмотрена в [7, 18, 19]. Параметры источников возмущений подбирались, исходя из степени совпадения форм расчетных и зарегистрированных волн в океане.

Перечисленные работы, посвященные событию 15.01.2022, в большинстве являлись результатом либо численных экспериментов, либо анализа процессов в очаге.

Волны от движущейся области повышенного атмосферного давления в приближении «мелкой воды» рассматривались в [20]. При распространении таких областей со скоростью, заметно меньшей скорости длинных

волн в открытом океане, резонанс Праудмэна может возникать лишь на мелководье, когда скорость длинных волн приближается к скорости барического возмущения [21]. В противоположность этому волны Лэмба распространяются со скоростью, близкой к скорости звука в воздухе. Резонанс может возникать в районах глубоководных, но довольно узких впадин, при распространении над которыми скорость длинных волн превышает скорость волны Лэмба. Например, Марианская впадина при максимальной глубине около 11 км имеет среднюю ширину 69 км (https://ru.wikipedia.org/wiki/Марианский_жёлоб). Влияние таких впадин на распространение свободных и вынужденных волн на поверхности океана не исследовано.

В работе [22] приведены решения задач о возбуждении поверхностных волн от кратковременного воздействия давления на свободную поверхность, о возбуждении волн движущейся областью повышенного давления, в результате чего могут возникать метеоцунами. Анализировались формы поверхностных волн и волн придонного давления. Обсуждались различия между вариациями давления на дне и вариациями свободной поверхности.

Задача о волнах, возбуждаемых движущейся с постоянной скоростью областью повышенного давления, в одномерной постановке рассмотрена в [6, 11, 23], в двумерной – в [23]. Движущаяся область возбуждает вынужденные волны на свободной поверхности и на дне. Показано, что амплитуды волн придонного давления больше амплитуд вынуждающего давления над свободной поверхностью, амплитуды волн придонного давления, выраженные в метрах водяного столба, выше амплитуд поверхностных волн. В работах [17, 23] описывается корректировка данных о вариациях придонного давления для оценки формы вынужденных волн. Оценки свободных волн не рассматривались.

Данные о придонном давлении ближайших к очагу глубоководных станций при оперативном прогнозе цунами используются действующим способом NOAA⁵, экспресс-

⁴ NOAA Center for Tsunami Research: Volcano-generated Tsunami Event - January 15, 2022 Hunga Tonga-Hunga Ha'apa Tsunami. URL: <https://nctr.pmel.noaa.gov/tonga20220115/> (дата обращения: 08.04.2025).

⁵ NOAA Center for Tsunami Research: Tsunami Forecasting. URL: <https://nctr.pmel.noaa.gov/tsunami-forecast.html> (дата обращения: 08.04.2025).

методом [24] для оценки формы ожидаемого цунами в более удаленных точках и вблизи побережий. Как показано на сайте NOAA Center for Tsunami Research, завышенные оценки амплитуд поверхностных волн по данным о придонном давлении могут быть причиной неадекватного определения степени опасности прогнозируемого цунами.

Целью работы является исследование решения задачи о волнах в слое жидкости, генерируемых возмущениями атмосферного давления. Рассматриваются волны на поверхности жидкости и волны придонного давления, возникающие под действием бегущих волн атмосферного давления (волн Лэмба). Задача представляет интерес в связи с использованием данных о давлении на дне океана при оперативном прогнозе цунами.

Постановка задачи

Рассматривается классическая задача о потенциальном движении в слое тяжелой жидкости глубины H , лежащем на твердом основании [8]. Задача решается в пространстве трех переменных, ось Oz с началом на свободной поверхности направлена вертикально вверх, оси Ox и Oy находятся на свободной поверхности. Ускорение свободного падения g направлено вниз.

Потенциал скорости φ в слое жидкости удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Для жидкости справедливо уравнение Бернулли

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = \frac{p_a}{\rho},$$

где ρ – плотность жидкости (воды), p_a – атмосферное давление, p – давление в слое жидкости.

В линейном приближении граничными условиями для (1) являются на возмущенной свободной поверхности $z = \zeta$ (значения переменных φ и p отнесены к $z = 0$):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (2)$$

и

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + g\zeta = \frac{p_a}{\rho}; \quad (3)$$

$$\text{на дне } (z = -H): \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

В настоящей работе возмущение задается давлением над свободной поверхностью $p = p_0 + p_a$, включающим некоторое аксиально-симметричное возмущение $p_0(r; t)$. Также для общности может быть задано аксиально-симметричное начальное возвышение свободной поверхности, обусловленное другим возможным механизмом генерации, не обязательно связанное с изменениями давления. В силу линейности задачи возбужденные этими источниками волны не влияют друг на друга.

Давление на дне ($z = -H$) определяется из уравнения Бернулли по найденному φ :

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p_a + \rho gH = p_{\text{bott}} + p_a + \rho gH, \quad (5)$$

где p_{bott} – вариации давления на дне.

Задача (1)–(4) в цилиндрических координатах решается одним из распространенных способов – применением интегральных преобразований Лапласа по времени ($f(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt$) и Фурье–Бесселя ($f(\xi) = \int_0^\infty f(r) \cdot J_0(\xi r) r dr$) по радиальной координате [25].

Решение представляется в виде образов преобразования Фурье–Бесселя. Этого достаточно для сравнительного анализа волн на свободной поверхности и волн на дне.

Результаты и обсуждение

Волны, возбуждаемые кратковременным импульсом давления над свободной поверхностью

Начальным условием для задачи (1)–(4) является возвышение свободной поверхности $\zeta(t = 0, r) = \zeta_0(r/R_1)$ внутри круга $r < R_1$,

($r^2 = x^2 + y^2$). Возмущение давления над свободной поверхностью задается кратковременным аксиально-симметричным импульсом давления в круге $r < R$: $p_0 = p_0(r/R) \delta(t/T)$, где $\delta(t/T)$ – δ -функция Дирака.

После интегральных преобразований система (1)–(4) представляется в виде

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \xi^2 \varphi = 0. \quad (1.1)$$

Граничные условия:
при $z = 0$

$$s\zeta - Z_0 = \frac{d\varphi}{dz}, \quad (2.1)$$

$$s\varphi + \frac{P_0 T}{\rho} + g\zeta = 0; \quad (3.1)$$

при $z = -H$ $\frac{d\varphi}{dz} = 0. \quad (4.1)$

Начальное условие:

$$Z_0 = \int_0^{R_1} \zeta_0(r/R_1) \cdot J_0(\xi r) \cdot r dr, \quad \varphi(t=0) = 0.$$

$P_0 T$ в (3.1) определено как

$$P_0 T = \int_0^\infty \int_0^R p_0(r/R) \cdot \delta(t/T) \cdot e^{-st} \cdot J_0(\xi r) \cdot dt \cdot r dr = \\ = T \int_0^R p_0(r/R) \cdot J_0(\xi r) \cdot r dr$$

В системе (1.1)–(4.1) все переменные величины являются образами интегральных преобразований. Ниже аргументы функции (s и/или ξ) указывают на то, образом какого преобразования является эта функция.

Решением (1.1) является $\varphi = A_1 e^{\xi z} + A_2 e^{-\xi z}$. Неизвестные коэффициенты A_1 и A_2 , а также $\zeta(s, \xi)$ находятся из решения системы (2.1)–(4.1) с учетом возмущения давления и начального возвышения свободной поверхности.

$$\varphi(z, s, \xi) = -\frac{P_0 T}{\rho} \frac{ch\xi(z+H)}{ch\xi H} \frac{s}{s^2 + \Omega^2} - \\ - gZ_0 \frac{ch\xi(z+H)}{ch\xi H} \frac{1}{s^2 + \Omega^2};$$

$$\zeta(s, \xi) = -\frac{P_0 T}{\rho g} \frac{\Omega^2}{s^2 + \Omega^2} + Z_0 \frac{s}{s^2 + \Omega^2}.$$

Вариации давления на дне находятся из (5):

$$p_{bott}(z = -H, s, \xi) = \frac{P_0 T}{ch\xi H} \frac{s^2}{s^2 + \Omega^2} + \frac{\rho g Z_0}{ch\xi H} \frac{s}{s^2 + \Omega^2} = \\ = \frac{P_0 T}{ch\xi H} \left(1 - \frac{\Omega^2}{s^2 + \Omega^2} \right) + \frac{\rho g Z_0}{ch\xi H} \frac{s}{s^2 + \Omega^2},$$

где $\Omega^2 = g\xi \cdot th\xi H$.

Представленные выражения имеют 2 полюса: $s = \pm i\Omega$, отвечающие свободным волнам.

Обратное преобразование Лапласа дает:

$$\zeta(t, \xi) = -\frac{P_0}{\rho g} \Omega T \sin \Omega t + Z_0 \cos \Omega t,$$

$$p_{bott}(-H, t, \xi) = \frac{P_0}{ch\xi H} \delta(t/T) -$$

$$-\frac{P_0}{ch\xi H} \Omega T \sin \Omega t + \frac{\rho g Z_0}{ch\xi H} \cos \Omega t.$$

Решения совпадают с результатом, полученным несколько другим способом в [22]. Волновые составляющие с точностью до размерного множителя совпадают.

В приближении длинных волн ($\xi H \ll 1$, $ch\xi H \approx 1$, $\Omega^2 \approx gH\xi^2$) полученные решения переходят в следующие выражения.

Волновая форма свободной поверхности:

$$\zeta(t, \xi) = -\frac{P_0 T}{\rho g} \sqrt{gH} \xi \sin \sqrt{gH} t \xi + Z_0 \cos \sqrt{gH} t \xi,$$

где первое слагаемое описывает волну от импульса давления, второе – волну от начального возвышения свободной поверхности.

Вариации давления на дне, регистрируемые донными станциями, приведенные к метрам водяного столба:

$$\eta_{bott}(-H, t, \xi) = \frac{p_{bott}(-H, t, \xi)}{\rho g} = \frac{P_0}{\rho g} \cdot \delta(t/T) - \\ - \frac{P_0 T}{\rho g} \cdot \sqrt{gH} \xi \sin \sqrt{gH} t \xi + Z_0 \cos \sqrt{gH} t \xi.$$

Здесь первое слагаемое описывает реакцию донного давления на импульс давления над свободной поверхностью, второе и

третье аналогичны слагаемым из предыдущего выражения.

В полученных выражениях волновые составляющие идентичны. Это позволяет совершенно обоснованно оценивать форму (ее длинноволновую составляющую) поверхности океана по данным о давлении на дне, полученным глубоководными станциями в океане (https://ndbc.noaa.gov/to_station.shtml).

**Волны, возбуждаемые
расходящейся концентрической волной
повышенного давления
над свободной поверхностью**

Представляет интерес задача о волнах в жидкости, генерируемых бегущей волной повышенного давления над свободной поверхностью, возбужденной распадом мгновенного повышения давления в ограниченной круговой области. По данным наблюдений такая волна (волна Лэмба) распространяется со скоростью, близкой к скорости звука в воздухе, амплитуда затухает с расстоянием от центра возмущения как $r^{-1/2}$ [1].

Формулировка задачи о волнах на поверхности слоя жидкости, возбуждаемых такой волной, совпадает с постановкой задачи (1)–(4), или (1.1)–(4.1) в образах интегральных преобразований. Волна в атмосфере возникает в результате распада возмущения в виде начальной области повышенного давления в круге $r < R$: $p_0 = p_0(r/R)$, образ Фурье–Бесселя которого $P_0 = \int_0^R p_0(r/R) \cdot J_0(\xi r) \cdot r dr$. Волна от такого возмущения над свободной поверхностью в образах интегральных преобразований описывается как $p_{\text{forcing}} = P_0 s / (s^2 + U^2 \xi^2)$. Фронт волны распространяется со скоростью U , амплитуда асимптотически затухает с расстоянием как $r^{-1/2}$ [26]. Начальный импульс давления возбуждает свободные волны, фронт которых движется со скоростью длинных волн. А волна повышенного давления вызывает на свободной поверхности вынужденные волны, распространяющиеся со скоростью U . В уравнении (3.1) следует $P_0 T$ заменить на $P_0 s / (s^2 + U^2 \xi^2)$.

Кроме того, дополнительно начальным условием является возвышение свободной поверхности $\zeta(t=0, r) = \zeta_0(r/R_1)$ внутри круга $r < R_1$, ($r^2 = x^2 + y^2$).

Решение задачи в образах интегральных преобразований представляется выражениями для вариаций вынуждающего давления над свободной поверхностью $p_{\text{forcing}}(s, \xi) = P_0 s / (s^2 + U^2 \xi^2)$, вариаций давления на дне

$$p_{\text{bott}}(z = -H, s, \xi) = \frac{P_0}{ch \xi H} \frac{s}{s^2 + U^2 \xi^2} \frac{s^2}{s^2 + \Omega^2} + \frac{\rho g Z_0}{ch \xi H} \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \text{ и формы свободной поверхности}$$

$$\zeta(s, \xi) = -\frac{P_0}{\rho g} \frac{s}{s^2 + U^2 \xi^2} \frac{\Omega^2}{s^2 + \Omega^2} + Z_0 \frac{s}{s^2 + \Omega^2}.$$

Два последних выражения имеют 4 полюса: $s = \pm i U \xi$, отвечающие вынужденным волнам, и $s = \pm i \Omega$, соответствующие свободным волнам.

Обратное преобразование Лапласа в приближении длинных волн ($\xi H \ll 1$, $\Omega \approx (gH)^{1/2} \xi$, $ch \xi H \approx 1$) дает следующие выражения:

для вариаций вынуждающего давления над свободной поверхностью (давление выражено в метрах водяного столба)

$$\eta_{\text{forcing}}(t, \xi) = \frac{p_{\text{forcing}}(0, t, \xi)}{\rho g} = \frac{P_0}{\rho g} \cdot \cos U t \xi, \quad (6)$$

для вариаций придонного давления (в метрах водяного столба)

$$\eta_{\text{bott}}(-H, t, \xi) = \frac{p_{\text{bott}}(-H, t, \xi)}{\rho g} = \frac{P_0}{\rho g} \cdot \frac{U^2}{U^2 - gH} \cos U t \xi - \frac{P_0}{\rho g} \cdot \frac{gH}{U^2 - gH} \cos \sqrt{gH} t \xi + Z_0 \cos \sqrt{gH} t \xi \quad (7)$$

и для формы свободной поверхности

$$\zeta(t, \xi) = \frac{P_0}{\rho g} \cdot \frac{gH}{U^2 - gH} \cos U t \xi - \frac{P_0}{\rho g} \cdot \frac{gH}{U^2 - gH} \cos \sqrt{gH} t \xi + Z_0 \cos \sqrt{gH} t \xi. \quad (8)$$

В полученных выражениях (7) и (8) первые слагаемые в правой части описывают вынужденные волны, распространяющиеся со скоростью U , вторые и третьи – свободные (гравитационные) волны, возбужденные

начальным скачком давления и начальным возвышением свободной поверхности, движущиеся со скоростью длинных волн $(gH)^{1/2}$.

Для представления выражений в пространственных переменных над ними следует выполнить обратное преобразование Фурье–Бесселя. Например, $\eta(t, r) = \frac{P_0}{\rho g} \int_0^\infty \cos Ut \xi \cdot J_0(r\xi) \xi d\xi$.

В силу известной асимптотики функции Бесселя $J_0(r\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi r \xi}} \cos(r\xi - \frac{\pi}{4})$ асимптотическая оценка соответствующих интегралов даст затухание амплитуд как $r^{-1/2}$ [26].

Из сравнения (6)–(8) видно, что амплитуда вынужденных волн придонного давления больше амплитуды вынуждающего давления в $U^2/(U^2 - gH)$ раз, амплитуда барической волны отличается от амплитуды вынуждающего давления в метрах водяного столба множителем $gH/(U^2 - gH)$, амплитуда вынужденных волн придонного давления больше амплитуды вынужденных поверхностных (барических) волн в U^2/gH раз. Результат совпадает с описанными во введении выводами работ [6, 11, 17, 23]. Выражения, описывающие свободные волны, идентичны.

Для оценки вариаций давления над свободной поверхностью данные глубоководных донных станций следует умножать на корректирующий множитель $(U^2 - gH)/U^2$. Это подтверждено в работах [6, 11] на основе данных измерений. Для оценки амплитуды вынужденных поверхностных (барических) волн по данным донных станций, выраженным в метрах водяного столба, следует применять другой корректирующий множитель gH/U^2 [17]. При скорости $U = 317$ м/с [7] и средней глубине океана $H = 4000$ м корректирующие множители равны 0.6 и 0.4 соответственно.

С помощью корректирующего множителя по данным донных станций можно адекватно оценить только амплитуды вынужденных волн, применение каких-либо корректирующих множителей к суперпозиции вынужденных и свободных волн неправомерно, поскольку разделить вынужденные и свободные волны невозможно.

По этой причине следует подходить с осторожностью к идентификации формы водной поверхности по вариациям донного давления в случаях, когда информация о давлении на дне содержит данные о вынужденных волнах. Такими случаями могут быть события, подобные событию 15.01.2022, или события, связанные с прохождением циклонов, тайфунов над океаном, сопровождающихся возбуждением метеоцунами [22].

Результаты решения задачи имеют практическое значение. Данные о вариациях придонного давления (7) ближайших к очагу возмущения глубоководных станций используются при оперативном прогнозе цунами. Расхождение между (7) и (8) может приводить к неадекватной оценке степени опасности прогнозируемого цунами. Вопрос о том, насколько адекватной является оценка амплитуды поверхностных волн по данным о давлении на дне, поставлен в [27].

Выражение (7) для вариаций придонного давления можно записать в виде

$$\eta_{\text{bott}}(-H, t, \xi) = \frac{P_0}{\rho g} \cos Ut \xi + \frac{P_0}{\rho g} \cdot \frac{gH}{U^2 - gH} \cos Ut \xi - \frac{P_0}{\rho g} \cdot \frac{gH}{U^2 - gH} \cos \sqrt{gH} t \xi + Z_0 \cos \sqrt{gH} t \xi. \quad (9)$$

Первое слагаемое в полученном выражении, ожидаемо, совпадает с выражением для вынуждающего давления (6), остальные совпадают с выражениями для форм поверхностных, вынужденных и свободных, волн (8). Из такого представления решения для вариаций придонного давления (9) следует, что получить истинную форму свободной поверхности по данным о давлении на дне можно, только если известно давление над свободной поверхностью. Располагая данными об атмосферном давлении $\eta_{\text{forcing}}(t)$ (6) и вычитая их из данных, полученных донными датчиками $\eta_{\text{bott}}(t)$ (7), можно получить форму свободной поверхности $\zeta(t)$ (8). Форму гравитационной составляющей поверхностных волн можно оценить, если из данных о придонном давлении (7) вычесть данные об атмосферном давлении (6), умноженные на $(U^2 - gH)/U^2$.

Атмосферное давление над свободной поверхностью (в волне Лэмба) может быть рассчитано, например, способом, основанным на алгоритмах экспресс-метода оперативного прогноза цунами, базирующегося на фундаментальном принципе взаимности [24]. Для прогноза вариаций давления в удаленных точках могут использоваться данные об атмосферном давлении ближайших к источнику повышенного давления барографов.

Заключение

Представлено решение задачи о волнах в слое тяжелой несжимаемой жидкости постоянной глубины.

В качестве источника волн задавалось локализованное кратковременное повышение давления над свободной поверхностью. В результате образуются свободные волны на поверхности и волны давления на дне. Формы и амплитуды поверхностных волн и волн придонного давления (в метрах водяного столба) одинаковы.

Другой источник волн представлял собой мгновенное повышение давления в локализованной области и распространяющуюся в атмосфере над свободной поверхностью волну давления, возникающую в результате распада области повышенного давления (модель волны Лэмба). Такой источник возбуждает на поверхности слоя и на дне свободные волны, бегущие со скоростью длинных волн, и вынужденные волны, распространяющиеся со скоростью волны вынуждающего давления. В приближении длинных волн формы и амплитуды свободных волн на поверхности и на дне одинаковы. Амплитуды вынужденных волн придонного давления выше, чем амплитуды вынужденных поверхностных волн. Для оценки формы волн на свободной поверхности по данным о давлении на дне можно применять корректирующий множитель gH/U^2 к части записи, содержащей только вынужденную компоненту. Для данных, включающих вынужденную и свободную составляющие, такой подход некорректен.

Завышенные амплитуды вариаций придонного давления могут быть причиной не-

адекватной оценки ожидаемого цунами способами оперативного прогноза, использующими данные о давлении на дне. Несмотря на уникальность событий, подобных событию 15.01.2022, службы предупреждения о цунами, видимо, должны учитывать эту особенность.

Предложен способ оценки формы свободной поверхности, включающей вынужденные (барические) и свободные (гравитационные) волны, а также отдельно формы свободных волн, исходя из данных о придонном давлении.

Предложен один из возможных способов расчета давления в волне Лэмба по барометрическим данным станций, ближайших к источнику высокого давления, на основе фундаментального принципа взаимности.

Список литературы

1. Terry J.P., Goff J., Winspear N., Bongolan V.P., Fisher S. **2022**. Tonga volcanic eruption and tsunami, January 2022: globally the most significant opportunity to observe an explosive and tsunamigenic submarine eruption since AD 1883 Krakatau. *Geoscience Letters*, 9(24). <https://doi.org/10.1186/s40562-022-00232-z>
2. Соловьева М.С., Падохин А.М., Шалимов С.Л. **2022**. Мегаизвержение вулкана Хунга 15 января 2022 г.: регистрация ионосферных возмущений посредством СДВ и ГНСС радиопросвечивания. *Письма в ЖЭТФ*, 116(11): 816–821.
3. Amores A., Monserrat S., Marcos M., Argüeso D., Villalonga J., Jorda G., Gomis D. **2022**. Numerical simulation of atmospheric Lamb waves generated by the 2022 Hunga-Tonga volcanic eruption. *Geophysical Research Letters*, 49, e2022GL098240. <https://doi.org/10.1029/2022GL098240>
4. Kubota T., Saito T., Nishida K. **2022**. Global fast-traveling tsunamis driven by atmospheric Lamb waves on the 2022 Tonga eruption. *Science*, 377(6601): 91–94. <https://doi.org/10.1126/science.abo4364>
5. Matoza R.S., Fee D., Assink J.D., Iezzi A.M., Green D.N., Kim K., Toney L., Lecocq T., Krishnamoorthy S., Lalande J.-M. et al. **2022**. Atmospheric waves and global seismoacoustic observations of the January 2022 Hunga eruption, Tonga. *Science*, 377(6601): 95–100. <https://doi.org/10.1126/science.abo7063>
6. Nosov M.A., Kolesov S.V., Sementsov K.A. **2023**. Interpretation of signals recorded by ocean-bottom pressure gauges during the passage of atmospheric lamb wave on 15 January 2022. *Remote Sensing*, 15(12), 3071. <https://doi.org/10.3390/rs15123071>
7. Gusman A.R., Roger J., Noble C., Wang X., Power W., Burbidge D. **2022**. The 2022 Hunga Tonga–Hunga

- Ha'apai volcano air-wave generated tsunami. *Pure and Applied Geophysics*, 179: 3511–3525. <https://doi.org/10.1007/s00024-022-03154-1>
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. **1986**. *Теоретическая физика: учеб. пособие: в 10 т. Т. 6. Гидродинамика*. 3-е изд. М.: Наука, 736 с.
 9. Purkis S.J., Ward S.N., Fitzpatrick N.M., Garvin J.B., Slayback D., Cronin S.J., Palaseanu-Lovejoy M., Dempsey A. **2023**. The 2022 Hunga-Tonga megatsunami: Near-field simulation of a once-in-a-century event. *Science Advances*, 9(15). <https://doi.org/10.1126/sciadv.adf5493>
 10. Shrivastava M.N., Sunil A.S., Maurya A.K., Aguilera F., Orrego S., Sunil P.S., Cienfuegos R., Moreno M. **2023**. Tracking tsunami propagation and Island's collapse after the Hunga Tonga Hunga Ha'apai 2022 volcanic eruption from multi-space observations. *Scientific Reports*, 20109. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-46397-1>
 11. Носов М.А., Семенцов К.А., Колесов С.В., Прядун В.В. **2022**. Проявления атмосферной волны Лэмба в вариациях придонного давления. *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия*, 6: 66–73.
 12. Miyashita T., Nishino A., Ho T.-C., Yasuda T., Mori N., Shimura T., Fukui N. **2023**. Multi-scale simulation of subsequent tsunami waves in Japan excited by air pressure waves due to the 2022 Tonga volcanic eruption. *Pure and Applied Geophysics*, 180: 3195–3223. <https://doi.org/10.1007/s00024-023-03332-9>
 13. Tanioka Y., Yamanaka Y., Nakagaki T. **2022**. Characteristics of the deep sea tsunami excited offshore Japan due to the air wave from the 2022 Tonga eruption. *Earth, Planets and Space*, 74(61). <https://doi.org/10.1186/s40623-022-01614-5>
 14. Kubo H., Kubota T., Suzuki W., Aoi S., Sandanbata O., Chikadasa N., Ueda H. **2022**. Ocean-wave phenomenon around Japan due to the 2022 Tonga eruption observed by the wide and dense ocean-bottom pressure gauge networks. *Earth, Planets and Space*, 74, 104. <https://doi.org/10.1186/s40623-022-01663-w>
 15. Omira R., Ramalho R.S., Kim J., González P.J., Kadri U., Miranda J.M., Carrilho F., Baptista M.A. **2022**. Global Tonga tsunami explained by a fast-moving atmospheric source. *Nature*, 609: 734–740. <https://doi.org/10.1038/s41586-022-04926-4>
 16. Fujii Y., Satake K. **2024**. Modeling the 2022 Tonga eruption tsunami recorded on ocean bottom pressure and tide gauges around the Pacific. *Pure and Applied Geophysics*, 181: 1793–1809. <https://doi.org/10.1007/s00024-024-03477-1>
 17. Ren Z., Higuera P., Liu P.L.-F. **2023**. On tsunami waves induced by atmospheric pressure shock waves after the 2022 Hunga Tonga-Hunga Ha'apai volcano eruption. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 128, e2022JC019166. <https://doi.org/10.1029/2022JC019166>
 18. Heidarzadeh M., Gusman A.R., Ishibe T., Sabeti R., Sepic J. **2022**. Estimating the eruption-induced water displacement source of the 15 January 2022 Tonga volcanic tsunami from tsunami spectra and numerical modeling. *Ocean Engineering*, 261, 112165. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.112165>
 19. Hu G., Li L., Ren Z., Zhang K. **2023**. The characteristics of the 2022 Tonga volcanic tsunami in the Pacific Ocean. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 23(2): 675–691. <https://doi.org/10.5194/nhess-23-675-2023>
 20. Proudman J. **1929**. The effects on the sea of changes in atmospheric pressure. *Geophysical Journal International*, 2: 197–209. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1929.tb05408.x>
 21. Monserrat S., Vilibic I., Rabinovich A.B. **2006**. Meteorological tsunamis: atmospherically induced destructive ocean waves in the tsunami frequency band. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 6(6): 1035–1051. <https://doi.org/10.5194/nhess-6-1035-2006>
 22. Saito T., Kubota T., Chikadasa N. Y., Tanaka Y., Sandanbata O. **2021**. Meteorological tsunami generation due to sea-surface pressure change: Threedimensional theory and synthetics of ocean-bottom pressure change. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 126, e2020JC017011. <https://doi.org/10.1029/2020JC017011>
 23. Liu P.L.-F., Higuera P. **2022**. Water waves generated by moving atmospheric pressure: Theoretical analyses with applications to the 2022 Tonga event. *Journal of Fluid Mechanics*, 951(A34). <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.840>
 24. Korolev Yu.P. **2011**. An approximate method of short-term tsunami forecast and the hindcasting of some recent events. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 11(11): 3081–3091. <https://doi.org/10.5194/nhess-11-3081-2011>
 25. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. **1973**. *Методы теории функций комплексного переменного*. М.: Наука, 736 с.
 26. Стокер Дж.Дж. **1959**. *Волны на воде*. М.: Изд-во иностранной литературы, 620 с.
 27. Королев Ю.П., Королев П.Ю. **2025**. Оценка цунами в Тихом океане, вызванного взрывом вулкана Хунга Тонга–Хунга Хаапай 15 января 2022 г., экспресс-методом оперативного прогноза. [Электронный ресурс]. *Геосистемы переходных зон*, 9(1). <http://journal.imgg.ru/web/full/f2025-1-4.pdf>; <https://doi.org/10.30730/gtr.2025.9.1.056-065>

References

1. Terry J.P., Goff J., Winspear N., Bongolan V.P., Fisher S. **2022**. Tonga volcanic eruption and tsunami, January 2022: globally the most significant opportunity

- to observe an explosive and tsunamigenic submarine eruption since AD 1883 Krakatau. *Geoscience Letters*, 9(24). <https://doi.org/10.1186/s40562-022-00232-z>
2. Solovieva M.S., Padokhin A.M., Shalimov S.L. **2022**. Mega-eruption of the Hunga Volcano on January 15, 2022: Detection of ionospheric perturbations by VLF and GNSS radio sounding. *JETP Letters*, 116(11): 846–851.
 3. Amores A., Monserrat S., Marcos M., Argüeso D., Villalonga J., Jorda G., Gomis D. **2022**. Numerical simulation of atmospheric Lamb waves generated by the 2022 Hunga–Tonga volcanic eruption. *Geophysical Research Letters*, 49, e2022GL098240. <https://doi.org/10.1029/2022GL098240>
 4. Kubota T., Saito T., Nishida K. **2022**. Global fast-traveling tsunamis driven by atmospheric Lamb waves on the 2022 Tonga eruption. *Science*, 377(6601): 91–94. <https://doi.org/10.1126/science.abo4364>
 5. Matoza R.S., Fee D., Assink J.D., Iezzi A.M., Green D.N., Kim K., Toney L., Lecocq T., Krishnamoorthy S., Lalande J.-M. et al. **2022**. Atmospheric waves and global seismoacoustic observations of the January 2022 Hunga eruption, Tonga. *Science*, 377(6601): 95–100. <https://doi.org/10.1126/science.abo7063>
 6. Nosov M.A., Kolesov S.V., Sementsov K.A. **2023**. Interpretation of signals recorded by ocean-bottom pressure gauges during the passage of atmospheric lamb wave on 15 January 2022. *Remote Sensing*, 15(12), 3071. <https://doi.org/10.3390/rs15123071>
 7. Gusman A.R., Roger J., Noble C., Wang X., Power W., Burbidge D. **2022**. The 2022 Hunga Tonga–Hunga Ha’apai volcano air-wave generated tsunami. *Pure and Applied Geophysics*, 179: 3511–3525. <https://doi.org/10.1007/s00024-022-03154-1>
 8. Landau L.D., Lifshitz E.M. **1987**. *Course of theoretical physics*. Vol. 6. 2nd Engl. ed. *Fluid mechanics*. Pergamon Press. (Translation from the Russian).
 9. Purkis S.J., Ward S.N., Fitzpatrick N.M., Garvin J.B., Slayback D., Cronin S.J., Palaseanu-Lovejoy M., Dempsey A. **2023**. The 2022 Hunga–Tonga megatsunami: Near-field simulation of a once-in-a-century event. *Science Advances*, 9(15). <https://doi.org/10.1126/sciadv.adf5493>
 10. Shrivastava M.N., Sunil A.S., Maurya A.K., Aguilera F., Orrego S., Sunil P.S., Cienfuegos R., Moreno M. **2023**. Tracking tsunami propagation and Island’s collapse after the Hunga Tonga Hunga Ha’apai 2022 volcanic eruption from multi-space observations. *Scientific Reports*, 20109. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-46397-1>
 11. Nosov M.A., Sementsov K.A., Kolesov S.V., Pryadun V.V. **2022**. Atmospheric Lamb wave manifestation in bottom pressure variations. *Moscow University Physics Bulletin*, 77(6): 896–904.
 12. Miyashita T., Nishino A., Ho T.-C., Yasuda T., Mori N., Shimura T., Fukui N. **2023**. Multi-scale simulation of subsequent tsunami waves in Japan excited by air pressure waves due to the 2022 Tonga volcanic eruption. *Pure and Applied Geophysics*, 180: 3195–3223. <https://doi.org/10.1007/s00024-023-03332-9>
 13. Tanioka Y., Yamanaka Y., Nakagaki T. **2022**. Characteristics of the deep sea tsunami excited offshore Japan due to the air wave from the 2022 Tonga eruption. *Earth, Planets and Space*, 74(61). <https://doi.org/10.1186/s40623-022-01614-5>
 14. Kubo H., Kubota T., Suzuki W., Aoi S., Sandanbata O., Chikasada N., Ueda H. **2022**. Ocean-wave phenomenon around Japan due to the 2022 Tonga eruption observed by the wide and dense ocean-bottom pressure gauge networks. *Earth, Planets and Space*, 74(104). <https://doi.org/10.1186/s40623-022-01663-w>
 15. Omira R., Ramalho R.S., Kim J., González P.J., Kadri U., Miranda J.M., Carrilho F., Baptista M.A. **2022**. Global Tonga tsunami explained by a fast-moving atmospheric source. *Nature*, 609: 734–740. <https://doi.org/10.1038/s41586-022-04926-4>
 16. Fujii Y., Satake K. **2024**. Modeling the 2022 Tonga eruption tsunami recorded on ocean bottom pressure and tide gauges around the Pacific. *Pure and Applied Geophysics*, 181: 1793–1809. <https://doi.org/10.1007/s00024-024-03477-1>
 17. Ren Z., Higuera P., Liu P.L.-F. **2023**. On tsunami waves induced by atmospheric pressure shock waves after the 2022 Hunga Tonga–Hunga Ha’apai volcano eruption. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 128, e2022JC019166. <https://doi.org/10.1029/2022JC019166>
 18. Heidarzadeh M., Gusman A.R., Ishibe T., Sabeti R., Sepic J. **2022**. Estimating the eruption-induced water displacement source of the 15 January 2022 Tonga volcanic tsunami from tsunami spectra and numerical modeling. *Ocean Engineering*, 261(112165). <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.112165>
 19. Hu G., Li L., Ren Z., Zhang K. **2023**. The characteristics of the 2022 Tonga volcanic tsunami in the Pacific Ocean. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 23(2): 675–691. <https://doi.org/10.5194/nhess-23-675-2023>
 20. Proudman J. **1929**. The effects on the sea of changes in atmospheric pressure. *Geophysical Journal International*, 2: 197–209. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1929.tb05408.x>
 21. Monserrat S., Vilibic I., Rabinovich A.B. **2006**. Meteotsunamis: atmospherically induced destructive ocean waves in the tsunami frequency band. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 6(6): 1035–1051. <https://doi.org/10.5194/nhess-6-1035-2006>
 22. Saito T., Kubota T., Chikasada N. Y., Tanaka Y., Sandanbata O. **2021**. Meteorological tsunami generation due to sea-surface pressure change: Three-dimensional theory and synthetics of ocean-bot-

- tom pressure change. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 126, e2020JC017011. <https://doi.org/10.1029/2020JC017011>
23. Liu P.L.-F., Higuera P. **2022**. Water waves generated by moving atmospheric pressure: Theoretical analyses with applications to the 2022 Tonga event. *Journal of Fluid Mechanics*, 951(A34). <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.840>
24. Korolev Yu.P. **2011**. An approximate method of short-term tsunami forecast and the hindcasting of some recent events. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 11(11): 3081–3091. <https://doi.org/10.5194/nhess-11-3081-2011>
25. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. **1973**. [*Methods of complex variable theory*]. Moscow: Nauka, 736 p. (In Russ.).
26. Stoker J.J. **1957**. *Water waves*. New York, London: Interscience Publ. <https://doi.org/10.1002/9781118033159>
27. Korolev Yu.P., Korolev P.Yu. **2025**. Assessment of the tsunami in the Pacific Ocean caused by the explosion of the Hunga Tonga–Hunga Ha'apai volcano on January 15, 2022, using the express method of operational forecasting. *Geosistemy perexodnykh zon = Geosystems of Transition Zones*, 9(1): 56–65. (In Russ. & in Engl.). <https://doi.org/10.30730/gtr.2025.9.1.056-065>; <https://www.elibrary.ru/kktwzl>

Об авторе

Королёв Юрий Павлович (<https://orcid.org/0000-0002-7068-7341>), кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, лаборатория цунами, Институт морской геологии и геофизики ДВО РАН (ИМГиГ ДВО РАН), Южно-Сахалинск, Россия, Yu_P_K@mail.ru

Поступила 24.04.2025

Принята к публикации 15.06.2025

About the Author

Korolev, Yuriy P. (<https://orcid.org/0000-0002-7068-7341>), Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Leading Researcher, Tsunami Laboratory, Institute of Marine Geology and Geophysics, Far Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Yuzhno-Sakhalinsk, Russia, Yu_P_K@mail.ru

Received 24 April 2025

Accepted 15 June 2025