

Научный журнал

Учредитель и издатель:

ФГБУН Институт морской геологии и геофизики
Дальневосточного отделения
Российской академии наук

Издаётся с января 2017 г.

Периодичность издания 4 раза в год

Scientific journal

Founder and Publisher:

Institute of Marine Geology and Geophysics
of the Far Eastern Branch
of the Russian Academy of Sciences

Published since January 2017

Periodicity: Quarterly

Основная задача журнала – информирование научной общественности, российской и зарубежной, о результатах изучения геосистем переходных зон Земли и связанных с ними проблем геофизики, геологии, геодинамики, сейсмологии, геоэкологии и других наук.

The main objective of the journal is informing of scientific community, Russian and foreign, about the results of researches in geosystems of the Earth's transition zones and related problems of geophysics, geology, geodynamics, seismology, geoecology and other sciences.

Журнал:

- индексируется в **Российском индексе научного цитирования (РИНЦ)**;
- регистрируется в системе **CrossRef**. Научным публикациям присваивается идентификатор – DOI;
- включен в каталог **Ulrich's Periodicals Directory**;
- включен в международную базу научных журналов открытого доступа – **Directory of Open Access Journals (DOAJ)**;
- входит в **Перечень ВАК** – Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки: :

- 1.6.1. Общая и региональная геология. Геотектоника и геодинамика (*геолого-минералогические*)
- 1.6.3. Петрология, вулканология (*геолого-минералогические*)
- 1.6.9. Геофизика (*геолого-минералогические; физико-математические*)
- 1.6.14. Геоморфология и палеогеография (*географические*)
- 1.6.17. Океанология (*географические; геолого-минералогические; физико-математические*)
- 1.6.20. Геоинформатика, картография (*физико-математические*)
- 1.6.21. Геоэкология (*географические; геолого-минералогические*)
- 1.5.15. Экология (*биологические*)
- 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (*технические; физико-математические*)
- отнесен в Перечне ВАК к журналам II квартиля (K2).

The Journal is:

- indexed in **Russian Science Citation Index (RISC)**;
 - registered in the **CrossRef** system. Scientific publications are assigned an individual identifier DOI;
 - included in the **Ulrich's Periodicals Directory** database;
 - included in the **Directory of Open Access Journals (DOAJ)**;
 - included in the **VAK List** – the List of peer reviewed scientific journals, in which main scientific results of dissertations for the Candidate of Sciences and Doctor of Sciences degrees in the following scientific specialties and corresponding branches of science should be published:
- 1.6.1. General and regional geology. Geotectonics and geodynamics (*Geology and Mineralogy*)
 - 1.6.3. Petrology and volcanology (*Geology and Mineralogy*)
 - 1.6.9. Geophysics (*Geology and Mineralogy; Physics and Mathematics*)
 - 1.6.14. Geomorphology and Paleogeography (*Geography*)
 - 1.6.17. Oceanology (*Geography; Geology and Mineralogy; Physics and Mathematics*)
 - 1.6.20. Geoinformatics and cartography (*Physics and Mathematics*)
 - 1.6.21. Geoecology (*Geography; Geology and Mineralogy*)
 - 1.5.15. Ecology (*Biology*)
 - 1.1.8. Mechanics of deformable solids (*Physics and Mathematics; Engineering*)
 - it is assigned to the K2 quartile in the VAK list.

Адрес учредителя и издателя

ИМГиГ ДВО РАН
ул. Науки, 16, Южно-Сахалинск, 693022
Тел./факс: (4242) 791517
E-mail: gtrz-journal@mail.ru
Сайт: <http://journal.imgg.ru>

Postal address

IMGG FEB RAS
1B, Nauki Str., Yuzhno-Sakhalinsk, 693022
Tel. / Fax: (4242) 791517
E-mail: gtrz-journal@mail.ru
Website: <http://journal.imgg.ru>

© ИМГиГ ДВО РАН, 2023

Редакционная коллегия*Главный редактор*

Завьялов Петр Олегович, член-корреспондент РАН, д-р геогр. наук, заместитель директора, руководитель лаборатории взаимодействия океана с водами суши и антропогенных процессов, Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва

Заместитель главного редактора

Богомолов Леонид Михайлович, д-р физ.-мат. наук, директор, Институт морской геологии и геофизики ДВО РАН, Южно-Сахалинск

Ответственный секретарь

Прытков Александр Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, Институт морской геологии и геофизики ДВО РАН, Южно-Сахалинск

- **Адушкин Виталий Васильевич**, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, Институт динамики геосфер РАН; Московский физико-технический институт, Москва
- **Алексанин Анатолий Иванович**, д-р техн. наук, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток
- **Быков Виктор Геннадьевич**, д-р физ.-мат. наук, Институт тектоники и геофизики им. Ю.А. Косыгина ДВО РАН, Хабаровск
- **Закупин Александр Сергеевич**, канд. физ.-мат. наук, Институт морской геологии и геофизики ДВО РАН, Южно-Сахалинск – *зам. главного редактора*
- **Ковалев Дмитрий Петрович**, д-р физ.-мат. наук, Институт морской геологии и геофизики ДВО РАН, Южно-Сахалинск
- **Кочарян Геворг Грантович**, д-р физ.-мат. наук, профессор, Институт динамики геосфер РАН, Москва
- **Куркин Андрей Александрович**, д-р физ.-мат. наук, профессор, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород
- **Лабай Вячеслав Степанович**, д-р биол. наук, Сахалинский филиал Всероссийского научно-исследовательского института рыбного хозяйства и океанографии, Южно-Сахалинск
- **Левин Владимир Алексеевич**, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток; Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва
- **Лучин Владимир Александрович**, д-р геогр. наук, Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН, Владивосток
- **Марапупец Юрий Валентинович**, д-р физ.-мат. наук, доцент, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Камчатский край, Паратунка
- **Огородов Станислав Анатольевич**, профессор РАН, д-р геогр. наук, чл.-корр. РАН, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва
- **Плехов Олег Анатольевич**, чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор, Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь
- **Разжигаяева Надежда Глебовна**, д-р геогр. наук, Тихоокеанский институт географии ДВО РАН, Владивосток
- **Ребetsкий Юрий Леонидович**, д-р физ.-мат. наук, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Москва
- **Родкин Михаил Владимирович**, д-р физ.-мат. наук, Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, Москва
- **Рыбин Анатолий Кузьмич**, д-р физ.-мат. наук, Научная станция РАН в г. Бишкеке, Бишкек, Киргизия
- **Сасорова Елена Васильевна**, д-р физ.-мат. наук, Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва

Editorial Board*Editor-in-Chief*

Peter O. Zav'yalov, Corr. Member of the RAS, Dr. Sci. (Geography), Deputy Director, Head of the Laboratory of land-ocean interactions and the anthropogenic impact, P.P. Shirshov Institute of Oceanology of RAS, Moscow, Russia

Deputy Editor-in-Chief

Leonid M. Bogomolov, Dr. Sci. (Phys. and Math.), Director, Institute of Marine Geology and Geophysics of the FEB RAS, Yuzhno-Sakhalinsk, Russia

Executive Secretary

Alexander S. Prytkov, Cand. Sci. (Phys. and Math.), Institute of Marine Geology and Geophysics of the FEB RAS, Yuzhno-Sakhalinsk

- **Vitaly V. Adushkin**, Academician of RAS, Dr. Sci. (Phys. and Math.), Institute of Geosphere Dynamics of RAS; Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow
- **Anatoly I. Alexanin**, Dr. Sci. (Eng.), The Institute of Automation and Control Processes of the FEB RAS, Vladivostok
- **Victor G. Bykov**, Dr. Sci. (Phys. and Math.), Yu.A. Kosygin Institute of Tectonics and Geophysics of the FEB RAS, Khabarovsk
- **Alexander S. Zakupin**, Cand. Sci. (Phys. and Math.), Institute of Marine Geology and Geophysics of the FEB RAS, Yuzhno-Sakhalinsk – *Deputy Editor-in-Chief*
- **Dmitry P. Kovalev**, Dr. Sci. (Phys. and Math.), Institute of Marine Geology and Geophysics of the FEB RAS, Yuzhno-Sakhalinsk
- **Gevorg G. Kocharyan**, Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professor, Institute of Geosphere Dynamics of RAS, Moscow
- **Andrei A. Kurkin**, Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professor, Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Nizhniy Novgorod
- **Vyacheslav S. Labay**, Dr. Sci. (Biology), Sakhalin Branch of the Russian Federal Research Institute of Fisheries and Oceanography, Yuzhno-Sakhalinsk
- **Vladimir A. Levin**, Academician of RAS, Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professor, Institute of Automation and Control Processes of the FEB RAS, Vladivostok; Lomonosov Moscow State University, Moscow
- **Vladimir A. Luchin**, Dr. Sci. (Geogr.), V.I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute of the FEB RAS, Vladivostok
- **Yuri V. Marapulets**, Dr. Sci. (Phys. and Math.), Associate Professor, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation of the FEB RAS, Kamchatka Region
- **Stanislav A. Ogorodov**, Professor of RAS, Dr. Sci. (Geogr.), Corr. Member of RAES, Lomonosov Moscow State University, Moscow
- **Oleg A. Plekhov**, Corr. Member of RAS, Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professor, Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of RAS, Perm'
- **Nadezhda G. Razjigaeva**, Dr. Sci. (Geogr.), Pacific Institute of Geography of the Far Eastern Branch of RAS, Vladivostok
- **Yuri L. Rebetskiy**, Dr. Sci. (Phys. and Math.), Schmidt Institute of Physics of the Earth of RAS, Moscow
- **Mikhail V. Rodkin**, Dr. Sci. (Phys. and Math.), Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics of RAS, Moscow
- **Anatoly K. Rybin**, Dr. Sci. (Phys. and Math.), Research Station of RAS in Bishkek City, Bishkek, Kyrgyzstan
- **Elena V. Sasorova**, Dr. Sci. (Phys. and Math.), P.P. Shirshov Institute of Oceanology of RAS, Moscow

Редакционная коллегия

- **Сергеева Ирина Вячеславовна**, д-р биол. наук, профессор, Саратовский государственный аграрный университет им. Н.И. Вавилова, Саратов
- **Такахаши Хироаки**, профессор, Институт сейсмологии и вулканологии Университета Хоккайдо, Саппоро, Япония
- **Троицкая Юлия Игоревна**, д-р физ.-мат. наук, профессор, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород; Нижегородский гос. университет им Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород
- **Христофорова Надежда Константиновна**, д-р биол. наук, профессор, чл.-корр. РАЕН, Заслуженный деятель науки РФ, Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
- **Шакиров Ренат Белалович**, д-р геол.-минер. наук, доцент, Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН, Владивосток
- **Шевченко Георгий Владимирович**, д-р физ.-мат. наук, Сахалинский филиал Всероссийского научно-исследовательского института рыбного хозяйства и океанографии, Южно-Сахалинск
- **Шеменда Александр Ильич**, профессор исключительного класса, Университет Ниццы София-Антиполис, Ницца, Франция
- **Ярмолук Владимир Викторович**, академик РАН, д-р геол.-минер. наук, Институт геологии рудных месторождений, петрографии, минералогии и геохимии РАН, Москва

Editorial Board

- **Irina V. Sergeeva**, Dr. Sci. (Biology), Professor, Saratov State Vavilov Agrarian University, Saratov
- **Hiroaki Takahashi**, Professor, Institute of Seismology and Volcanology, Hokkaido University, Sapporo, Japan
- **Yuliya I. Troitskaya**, Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professor, Institute of Applied Physics of RAS, Nizhniy Novgorod; Lobachevsky University, Nizhniy Novgorod
- **Nadezhda K. Khristoforova**, Dr. Sci. (Biology), Professor, Corr. Member of RAES, Far Eastern Federal University, Vladivostok
- **Renat B. Shakirov**, Dr. Sci. (Geol. and Miner.), Associate Professor, V.I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute of the FEB RAS, Vladivostok
- **Georgiy V. Shevchenko**, Dr. Sci. (Phys. and Math.), Sakhalin Branch of the Russian Federal Research Institute of Fisheries and Oceanography, Yuzhno-Sakhalinsk
- **Alexandre I. Chemenda (Shemenda)**, Dr. Sci. (Phys. and Math.), Professeur des Universités de Classe Exceptionnelle, Université de Nice Sophia Antipolis, Nice, France
- **Vladimir V. Yarmolyuk**, Academician of RAS, Dr. Sci. (Geol. and Miner.), Institute of Geology of Ore Deposits, Petrography, Mineralogy and Geochemistry of RAS, Moscow

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций. (Регистрационный номер ПИ № ФС 77-73243 от 13.07.2018 г.). Территория распространения – Российская Федерация, зарубежные страны.

Переводчик Качесова Галина Сергеевна

Редактор к.ф.н. **Низяева Галина Филипповна**
Компьютерная верстка **Филимонкина Анна Александровна**
Корректор **Качесова Галина Сергеевна**
Дизайн **Леоненкова Александра Викторовна**

Адрес редакции журнала и типографии:
 693022, Россия, г. Южно-Сахалинск, ул. Науки, 1Б.
 gtrj-journal@mail.ru

Формат 60 × 84 /8. Усл. печ. л. 13.2.
 Тираж 150 экз. Заказ 8023. Свободная цена.
 Дата выхода в свет 28.09.2023.

Подписной индекс в Объединенном интернет-каталоге «Пресса России» (www.pressa-rr.ru) – 80882.

По вопросам распространения обращаться также в редакцию.

Translator Galina S. Kachesova

Editor **Galina Ph. Nizyaeva**, Cand. Sci. (Phylogeny)
Desktop publishing **Anna A. Filimonkina**
Proofreader **Galina S. Kachesova**
Design **Alexandra V. Leonenkova**

Postal address of the Editorial Office and printing house:
 1B, Nauki Str., Yuzhno-Sakhalinsk, 693022.
 gtrj-journal@mail.ru

Sheet size 60 × 84 /8. Conv. print. sheets 13.2.
 Number of copies 150. Order no. 8023. Free price.
 Date of publishing 28.09.2023.

Subscription index in the United web-catalogue "Press of Russia" (www.pressa-rr.ru) – 80882.

Please also contact the Editorial Office for distribution.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENT

Геофизика. Сейсмология

Н.А. Сычева. Исследование сейсмотектонических деформаций земной коры Алтае-Саянской горной области. Часть I . . . 223

Общая и региональная геология

М.Ф. Крутенко, В.И. Исаев, Г. Лобова. «Палеозойская» нефть Урманского месторождения (юго-восток Западной Сибири) . . . 243

Общая и региональная геология. Океанология

Р.Б. Шакиров, Е.В. Мальцева, А.Л. Веникова, Н.Л. Соколова, А. И. Гресов. Комплексные геолого-геофизические исследования по обоснованию внешней границы континентального шельфа России в Охотском и Восточно-Сибирском морях (2006–2009 гг.): обзор . . . 264

Океанология. Геоинформатика и картография

Г.В. Шевченко, Д.М. Ложкин. Сезонные и межгодовые вариации температуры поверхности моря в Татарском проливе по спутниковым данным . . . 276

[*Т.А. Воронина, В.В. Воронин.* Метод выбора данных для восстановления формы источника цунами] . . . 292

Механика деформируемого твердого тела

П.Г. Великанов, Ю.П. Артюхин. Исследование по динамике многоэтажных зданий . . . 304

Геоэкология. Геоинформатика, картография

НАУЧНАЯ СМЕНА

М.Н. Маслова. Количественный анализ эколого-хозяйственного баланса и структуры использования земель бассейна р. Туманная . . . 316

Geophysics. Seismology

N.A. Sycheva. Study of seismotectonic deformations of the Earth's crust in the Altai-Sayan mountain region. Part I . . . 223

General and regional geology

M.F. Krutenko, V.I. Isaev, G. Lobova. The Paleozoic oil in the Urman field (the southeast of Western Siberia) . . . 243

General and regional geology. Oceanology

R.B. Shakirov, E.V. Maltseva, A.L. Venikova, N.L. Sokolova, A.I. Gresov. Complex geological and geophysical studies on substantiation of the outer limits of the Russian continental shelf in the Sea of Okhotsk and East Siberian Sea (2006–2009): Review (in Engl., <http://journal.imgg.ru/web/full/f-e2023-3-3.pdf>) . . . 264

Oceanology. Geoinformatics and cartography

G.V. Shevchenko, D.M. Lozhkin. Seasonal and interannual variations in sea surface temperature in the Tatar Strait according to satellite data (in Engl., <http://journal.imgg.ru/web/full/f-e2023-3-4.pdf>) . . . 276

T.A. Voronina, V.V. Voronin. Data selection method for restoring a tsunami source form (in English) . . . 292

Mechanics of deformable solids

P.G. Velikanov, Y.P. Artyukhin. Research on the dynamics of multi-storey buildings . . . 304

Geocology. Geoinformatics and cartography

NEW SCIENTIFIC GENERATION

M.N. Maslova. Quantitative analysis of the ecological and economic balance and the structure of land use in the basin of the Tumannaya River . . . 316

© Авторы 2023 г. Открытый доступ.
Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution License 4.0 International (CC BY 4.0)



© The Authors 2023. Open access.
Content is available under Creative Commons Attribution License 4.0 International (CC BY 4.0)

УДК 531.39

<https://doi.org/10.30730/gtr.2023.7.3.304-315>
<https://www.elibrary.ru/aotwnz>

Исследование по динамике многоэтажных зданий

П. Г. Великанов^{1,2}, Ю. П. Артюхин²

@ E-mail: pvelikanov@mail.ru

¹ Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Казань, Россия

² Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

Резюме. Проектирование многоэтажных зданий – актуальная задача развития современного мегаполиса. Получение точных решений при исследовании собственных и вынужденных колебаний зданий в рамках модели сплошной однородной среды (механика сплошных сред) с бесконечным числом степеней свободы часто трудно реализуемо. Поэтому в статье (в рамках модернизации метода конечных элементов) модель многоэтажного здания дискретизируется и наделяется конечным числом степеней свободы, размещенным в серединах конечных элементов в узлах (там же размещают и массу конечных элементов), которые упруго взаимодействуют с конечными элементами модели, не имеющими массы. Предполагается, что элементы многоэтажного здания работают только на изгиб, что вполне оправдывается сопоставлением частот его изгибных и продольных колебаний. Разрешающая система дифференциальных уравнений колебаний многоэтажного здания, в которую в квадратурах записаны выражения для энергий (потенциальной, кинетической и Релея), получена с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода. В статье с использованием функций Грина, матриц жесткости, масс, податливости и др. решены задачи о свободных колебаниях 3- и 100-этажных зданий. Полученные в статье результаты при их сравнении с точными решениями, реализованными с помощью прямого и непрямого методов граничных элементов, а также с другими малоизвестными численными решениями показали хорошее соответствие.

Ключевые слова: колебания многоэтажных зданий, частоты колебаний, функция Грина, матрица жесткости, матрица масс, матрица податливости

Research on the dynamics of multi-storey buildings

Peter G. Velikanov^{1,2}, Yury P. Artyukhin²

@ E-mail: pvelikanov@mail.ru

¹ Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan, Russia

² Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russia

Abstract. The design of multi-storey buildings is a natural trend in the development of a modern metropolis. Obtaining exact solutions when studying their own and forced oscillations within the framework of a continuous homogeneous medium model (continuum mechanics) with an infinite number of degrees of freedom is often difficult to implement. Therefore, in the article (as part of the modernization of the finite element method), the model of a multi-storey building is discretized and endowed with a finite number of degrees of freedom placed in the middle of the finite elements at the nodes (the mass of finite elements is also placed there), which elastically interact with the finite elements of the model that do not have mass. It is believed that the elements of a multi-storey building work only for bending, which is fully justified by comparing the frequencies of its bending and longitudinal oscillations. The resolving system of differential equations of oscillations of a multi-storey building, in which expressions for energies (potential, kinetic and Rayleigh) are written in quadratures, is obtained using Lagrange equations of the second kind. In the article, the problems of free oscillations of 3- and 100-storey buildings are solved using Green's functions, stiffness, mass, compliance matrices, etc. The approximate results obtained in the article, when compared with the little-known approximate results obtained by other methods, as well as exact results (direct and indirect methods of boundary elements), showed a good correspondence.

Keywords: oscillation of multi-storey buildings, oscillation frequencies, Green's function, stiffness matrix, mass matrix, compliance matrix

Для цитирования: Великанов П.Г., Артюхин Ю.П. Исследование по динамике многоэтажных зданий. *Геосистемы переходных зон*, 2023, т. 7, № 3, с. 304–315. <https://doi.org/10.30730/gtrz.2023.7.3.304-315>; <https://www.elibrary.ru/aotwnz>

Введение

Данная статья по исследованию динамики многоэтажных зданий является логическим продолжением статьи авторов [1], в которой рассматривалась динамика рамных конструкций.

К числу наиболее сложных объектов современного строительства относятся высотные здания, поэтому основные рекомендации по их проектированию принимаются согласованно международными общественными организациями архитекторов и инженеров: IABSE – ASCE и CIB. В настоящее время сооружения высотой до 30 м отнесены к зданиям повышенной этажности, до 50, 75 и 100 м – к I, II и III категориям многоэтажных зданий соответственно, свыше 100 м – к высотным зданиям [2–5].

Исследование в статье свободных колебаний многоэтажных зданий реализовано с помощью сравнения точного решения (в данном случае ими выступали прямой (метод взвешенных невязок) и непрямой (метод компенсирующих нагрузок) методы граничных элементов (МГЭ) [6–8]) с численными решениями: вместо метода конечных элементов, где узлы конечных элементов рамных конструкций размещены на их границах, была использована его модернизация (массу конечных элементов помещают в их середине и называют узлами, которые упруго взаимодействуют с элементами многоэтажных зданий, не имеющими массы). В основу МГЭ (метод граничных интегральных уравнений, метод теории потенциалов) положен переход от системы дифференциальных уравнений и граничных условий к их интегральному аналогу на границах области. Процедура решения включает дискретизацию границ области совокупностью (ансамблем) граничных элементов, применение различных вариантов аппроксимации геометрии границ и граничных функций, замену исходного интеграль-

For citation: Velikanov P.G., Artyukhin Yu.P. Research on the dynamics of multi-storey buildings. *Geosistemy perexodnykh zon = Geosystems of Transition Zones*, 2023, vol. 7, no. 3, pp. 304–315. (In Russ., abstr. in Engl.). <https://doi.org/10.30730/gtrz.2023.7.3.304-315>; <https://www.elibrary.ru/aotwnz>

ного соотношения дискретным аналогом для формирования системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), посредством решения которых определяются дискретные значения неизвестных функций в узловых точках на границе области.

В настоящее время наиболее распространена следующая методика получения элементов матрицы податливости (коэффициентов влияния): подобно тому как в статически неопределимых задачах сопротивления материалов для реализации метода сил формировалась каноническая система, к каждой из центрально расположенных в конечном элементе масс, на которые действуют внешние силы, прикладывают единичную силу и отдельно для каждой единичной силы строят эпюру изгибающих моментов; затем по правилу Верещагина или Симпсона находят искомые элементы матрицы. В данной статье для определения элементов матрицы податливости была использована как вышеописанная классическая методика, так и методика, позволяющая найти искомые элементы через функцию Грина. Найденные элементы матрицы податливости оказались идентичными, но затраченных усилий для их получения с помощью функции Грина, как показано, например, в [1], оказывается меньше.

Авторы исходят из предположения, что элементы многоэтажного здания работают только на изгиб. Продольные перемещения многоэтажного здания не учитываются, так как частота продольных колебаний на два порядка выше частоты изгибных колебаний. Такая модель приводит к составлению выражений кинетической и потенциальной энергии, что позволяет затем с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода получить систему дифференциальных уравнений колебаний многоэтажных зданий. В статье с использованием функций Грина, матриц жесткости, масс, податливости и др. решены задачи о свободных колебаниях 3- и 100-этажных зданий.

1. Постановка и решение задач

Переходя от задач механики сплошных сред с бесконечным числом степеней свободы после дискретизации (конечно-элементной, гранично-элементной и т.д.) к задачам с конечным числом степеней свободы, как показано в [1], кинетическая, потенциальная энергии, а также энергия Релея для механической системы с n степенями свободы могут быть представлены в виде квадратичных функций

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j; \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} x_i x_j; \quad Rel = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad (1.1)$$

где x_i, \dot{x}_i – поперечные перемещения и скорости перемещений сосредоточенных масс сооружений; m_{ij}, k_{ij}, r_{ij} – компоненты матриц масс $[M]$, жесткости $[K]$ и рассеивания $[R]$ соответственно.

Введя вектор-строку $(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и соответствующий ему после операции транспонирования вектор-столбец $\{x\}$, квадратичные функции энергий удалось представить в матрично-векторной форме. Использование в уравнении Лагранжа 2-го рода квадратичных функций энергий в матрично-векторной форме позволило путем дифференцирования получить систему дифференциальных уравнений колебаний системы с n степенями свободы в виде [9]:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [R]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{P\}, \quad (1.2)$$

где $\{P\} = (P_1, P_2, \dots, P_n)^m$ – вектор-столбец внешних нагрузок, приложенных к массам.

Рассматривая свободные колебания без учета рассеивания энергии, уравнение (1.2) примет вид (частное решение ищем в виде $\{x\} = \{B\}e^{i\omega t}$, причем $\{B\} = (B_1, B_2, \dots, B_n)^T$ – произвольный вектор-столбец):

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0. \quad (1.3)$$

Тогда задача после подстановки частного решения сводится к решению системы однородных уравнений относительно амплитуд B_k :

$$([K_1] - \lambda[M_1])\{B\} = 0; \quad \lambda = \frac{\omega^2 l^3 m}{d}; \quad [M] = m[M_1]; \quad [K] = \frac{d}{l^3}[K_1], \quad (1.4)$$

где $[M_1], [K_1]$ – безразмерные матрицы масс и жесткости соответственно; ω – частота колебаний; l – длина произвольного элемента; d – изгибная жесткость произвольного элемента; m – стандартная сосредоточенная масса, приложенная в середине элемента.

В некоторых случаях представления матриц в (1.3) и (1.4), описанных в [1], задача об определении собственных колебаний может быть эффективно решена с помощью прямого и обратного подходов.

Общее решение уравнения (1.3) запишем в виде [10, 11]:

$$x_i = \sum_{s=1}^n A_s \varphi_{is} \sin(\omega_s t + \alpha_s),$$

где φ_{is} – элементы модальной матрицы (амплитуд собственных форм колебаний) $[\varphi_{is}] = [Q]$, α_s – сдвиг фазы, ω_s – частота свободных колебаний; A_s, α_s – произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий для отклонений x_{i0} и скоростей \dot{x}_{i0} из системы $2n$ уравнений:

$$x_{i0} = \sum_{s=1}^n A_s \varphi_{is} \sin \alpha_s; \dot{x}_{i0} = \sum_{s=1}^n A_s \omega_s \varphi_{is} \cos \alpha_s.$$

Формы колебаний φ_{is} не зависят от начальных условий движения, но влияют только на постоянные A_s и α_s . Более удобным является другой вид общего решения с произвольными постоянными A_s, C_s :

$$x_i(t) = \sum_{s=1}^n \varphi_{is} (A_s \sin \sqrt{\lambda_s} t + C_s \cos \sqrt{\lambda_s} t).$$

Как показано в [1], основная трудность решения задачи колебаний сооружений состоит в определении матрицы податливости $[F] = [\delta_{ik}]$, которая на основе теоремы Максвелла о взаимности перемещений будет симметричной матрицей $\delta_{ik} = \delta_{ki}$. Введем в рассмотрение вектор $\bar{G}^{(k)}(x, \xi)$, называемый вектором Грина. Если записать его проекции, то при переборе $k = 1, 2, 3$ получим тензор Грина $[G_i^{(k)}]$, $i = 1, 2, 3$. Функции $G_i^{(k)}$ называются функциями перемещений Грина.

Применяя теорему Бетти о взаимности работ к двум системам сил, получим теорему Максвелла о взаимности перемещений для сосредоточенных сил (фактически функции перемещений Грина (матрица Грина) есть не что иное, как компоненты матрицы податливости):

$$G_k^{(j)}(x, \xi) = G_j^{(k)}(\xi, x). \tag{1.5}$$

Численная реализация задачи о собственных значениях была успешно реализована с помощью функций пакета символьной математики (ПСМ) «WolframMathematica» [12], перечисленных в [1].

2. Динамика многоэтажного здания

На рис. 1 представлена модель n -этажного здания, межэтажные плиты перекрытия которого предполагаются абсолютно жесткими, а вертикальные стойки гибкими и невесомыми. В результате внешнего воздействия или вибрации грунта боковые перемещения здания определяются горизонтальными смещениями плит w_i , $i = \overline{1, n}$. Так как плиты перемещаются поступательно, то углы поворота колонн в местах сопряжения с межэтажными перекрытиями оказываются нулевыми. Поэтому в рамках такой модели здание деформируется инерционными силами за счет сдвига плит относительно друг друга (рис. 2). Предполагается, что масса i -го этажа m_i сосредоточена в центре плиты и перемещения рамы происходят в ее плоскости. Приращение перемещений i -го этажа зависит от поперечной (перерезывающей) силы Q_i . Для каждого этажа предполагается своя относительная жесткость на сдвиг k_i (рис. 1). Если межэтажные стойки, равные высоте этажа h_i , имеют изгибную жесткость D_i , то изгиб каждой стойки будет состоять из изгиба двух консолей силами $Q_i/2$ (рис. 2) с длинами $h_i/2$. В середине пролета стойки имеется точка перегиба. В результате получаем относительный сдвиг плит [13]:

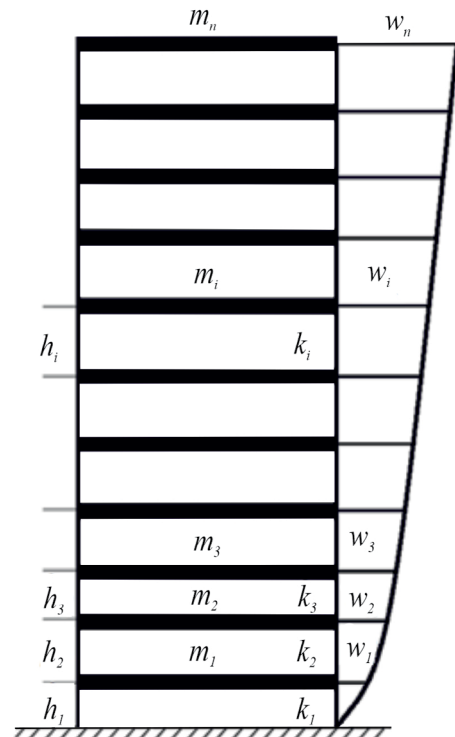


Рис. 1. Модель n -этажного здания.
Fig. 1. Model of an n -storey building.

$$a_i = w_i - w_{i-1} = 2 \left[\frac{Q_i}{2 \left(\frac{h_i}{2}\right)^3} \right] = \frac{Q_i h_i^3}{24 D_i} = \delta_i Q_i, \quad (2.1)$$

где $\delta_i = \frac{1}{k_i} = \frac{h_i^3}{24 D_i}$, $k_i = \frac{24 D_i}{h_i^3}$, δ_i – относительная податливость i -й стойки на сдвиг, k_i – относительная жесткость стойки на сдвиг.

В [13] в (2.1) вместо числа 24 записано 12 и указано, что берется суммарный момент инерции колонн этажа. Как оказалось, это отличие никак не влияет на конечный результат.

Матрица масс представляет собой диагональную матрицу, где по главной диагонали расположены массы межэтажных перекрытий.

Построим матрицу податливости на примере трехэтажного здания (рис. 3).

Прикладывая единичную нагрузку $Q = 1$ к первой плите, из (2.1) получим элементы матрицы податливости (прогибы в i -х точках от действия нагрузки в точке 1): $\delta_{11} = G_{11} = a_1 = \delta_{21} = \delta_{31}$.

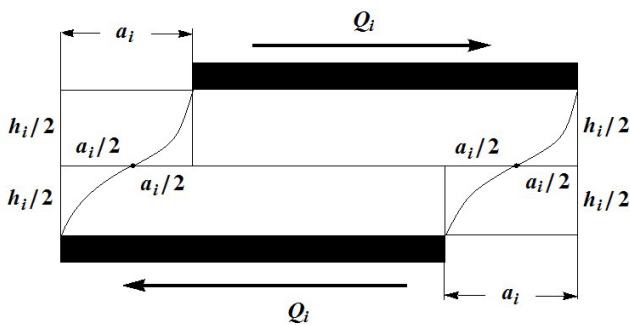


Рис. 2. Сдвиг плит относительно друг друга.
Fig. 2. The shift of the plates relative to each other.

Последние равенства следуют из того, что в точках 2 и 3 отсутствует поперечная сила и не происходит сдвига плит. При переносе единичной нагрузки в точку 2, в точке 1 снова возникнет сдвиг плиты, равный a_1 . А в точке 2 появляется дополнительный сдвиг a_2 . Полный прогиб составит

$$\delta_{22} = G_{22} = a_1 + a_2 = \sum_{j=1}^2 a_j = \delta_{32}; \quad \delta_{12} = a_1.$$

Аналогично вычислим остальные элементы матрицы податливости (рис. 3):

$$\delta_{13} = a_1; \quad \delta_{23} = a_1 + a_2;$$

$$G_{33} = \delta_{33} = a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{j=1}^3 a_j.$$

Таким образом, можно представить дискретную функцию Грина для i -й плиты при действии единичной поперечной нагрузки на k -ю плиту в виде

$$G_{ik} = \delta_{ik} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^k a_j, \quad i \geq k \\ i \\ \sum_{j=1}^i a_j, \quad i \leq k \end{array} \right\}, \quad (2.2)$$

$i, k = 1, 2, 3 \dots n.$

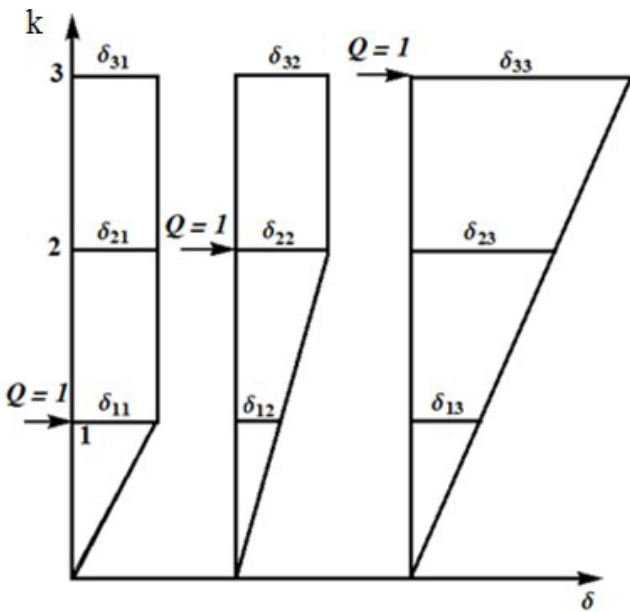


Рис. 3. Пример построения матрицы податливости для трехэтажного здания.
Fig. 3. An example of constructing a compliance matrix for a three-storey building.

Для проверки достоверности формулы (2.2) решим задачу о колебаниях трехэтажного здания при следующих данных: $m_1 = m_2 = m_3 = m$; $h_1 = h_2 = h_3 = h$; $D_1 = 3D$; $D_2 = 2D$; $D_3 = D$.

Согласно (2.2) будем иметь матрицу податливости $[F]$ и ее безразмерный аналог $[F_1]$:

$$[F] = \frac{h^3}{24 D} [F_1]; [F_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{11}{6} \end{bmatrix}.$$

Матрица масс получит выражение

$$[M] = m[E]; [E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Частотное уравнение запишется следующим образом:

$$\det([F_1] - \lambda_1[E]) = 0; \lambda_1 = \frac{24 D \omega_1^2}{m h^3}, \omega_1^2 = \frac{1}{\omega^2}.$$

Откуда

$$\omega_1^2 = \frac{m h^3 \lambda_1}{24 D}.$$

Вычисляя собственное число λ_1 в ПСМ «WolframMathematica» [12] $\{\lambda_{13}, \lambda_{12}, \lambda_{11}\} = Eigenvalues [F_1]$, получим $\{2.40515, 0.435867, 0.158984\}$.

Коэффициент квадрата обратной частоты равен

$$\beta_i^{-2} = \lambda_i / 24: \{0.100215, 0.0181611, 0.00662433\}.$$

Аналогичный коэффициент в [13] равен

$$\lambda_{1,2,3} = 14.4 \alpha; 2.62 \alpha; 0.954 \alpha, \left(\alpha = \frac{m h^3}{144 D} \right).$$

Вычисления дают совпадение до 3 знаков: $\{0.1, 0.0181944, 0.006625\}$.

Точные решения, полученные с помощью МГЭ (прямой и не прямой его реализаций), дают отличия от приближенной частоты: 1-я частота на 0.05 %, 2-я на 3.3 %, 3-я на 15.4 %.

Частоты i -го тона вычисляются по формуле

$$\omega_i = \beta_i \sqrt{\frac{D}{m h^3}}; \quad \beta_i = \sqrt{24 \lambda}.$$

Собственные векторы-строки колебаний получены с помощью $\{b_3, b_2, b_1\} = Eigenvectors[F_1]$: $\{-0.214935, -0.492656, -0.843263\}$, $\{-0.504896, -0.683054, 0.527748\}$, $\{0.835992, -0.539192, 0.101928\}$ и оказываются ортонормированными с погрешностью вычислений ПСМ «WolframMathematica» [12].

$\Lambda = 1/\lambda_1$ – собственное число, вычисленное по матрице жесткости:

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \{0.415775, 2.29428, 6.28995\}.$$

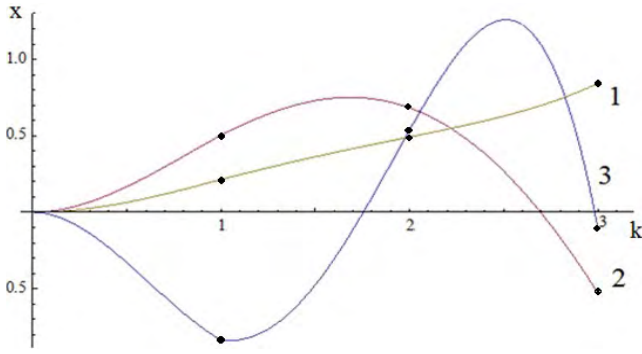


Рис. 4. Формы колебаний, соответствующие: 1 – первой частоте колебаний λ_1 ; 2 – второй частоте λ_2 ; 3 – третьей частоте λ_3 .

Fig. 4. Oscillation forms corresponding to: 1 – the first oscillation frequency λ_1 ; 2 – the second oscillation frequency λ_2 ; 3 – the third oscillation frequency λ_3 .

Наименьшая частота будет λ_1 , наибольшая λ_3 . Им отвечают собственные векторы b_3, b_1 . Интерполяция собственных векторов с учетом условий заделки у фундамента дома приведена на рис. 4. Первой (наименьшей) частоте колебаний λ_1 соответствует кривая 1 при отсутствии полуволн, второй частоте λ_2 – кривая 2 с одной полуволной, третьей частоте λ_3 – кривая 3 с двумя полуволнами. В [13] эти результаты отсутствуют.

Модальная матрица $[Q_F]$, соответствующая матрице податливости $[F]$, может быть получена функцией

$$[Q_F] = \text{JordanDecomposition}[F_1][[1]] = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.214935 & -0.504896 & 0.835992 \\ -0.492656 & -0.683054 & -0.539192 \\ -0.843263 & 0.527748 & 0.101928 \end{bmatrix},$$

где вектор-столбец $\{Q^s\}$ называют вектором формы колебаний для s -го тона:

$$\{Q^s\} = \{\varphi_s\} = \begin{Bmatrix} \varphi_{1s} \\ \varphi_{2s} \\ \varphi_{3s} \end{Bmatrix}.$$

Первый индекс показывает номер этажа (нумерация идет снизу). Поэтому только транспонированная матрица $\{b_3, b_2, b_1\}$ совпадает с модальной матрицей $[Q_F]$.

Модальные матрицы, вычисленные по матрице податливости и матрице жесткости, практически совпадают (векторы-столбцы могут отличаться знаком и соответствуют частотам λ_1 и λ).

Подсчитаем перемещения межэтажных перекрытий при учете начальных условий.

Введем размерные величины (в соответствии с [14]). Пусть каждое межэтажное перекрытие весит $P = 400$ т, относительная жесткость верхнего этажа $k_3 = 107$ т·см, $k_2 = 2k_3$, $k_1 = 3k_3$, изгибная жесткость колонн 3-го этажа $D = D_3 = k_3 \frac{h^3}{24} = 2.85333 \cdot 10^8$ т·см², $D_2 = 2D$, $D_1 = 3D$. Высота этажа $h = 4$ м = 400 см. Следовательно, масса этажа будет $m = P/g = 0.4077$ т·с²/см ($g = 981$ см/с²).

Пусть на уровне третьего этажа сообщен ударный импульс, т.е. в начальный момент этажу сообщена скорость $V_{30} = 30$ см/с, а дом находился в покое. Количество движения этажа соответствует импульсу. Допустим, что такая скорость сообщена с помощью треугольного импульса высотой P_0 и длительностью $t_1 = 0.1$ с (как увидим ниже, скорость $V_3(0.1) = 0$). Причем в начальный момент величина нагрузки равна P_0 , затем по линейному закону убывает до нуля. Тогда из равенства разности количества движения этажа импульсу $m(V_{30} - V_3(0.1)) = P_0 t_1 / 2$ найдем начальное значение динамической нагрузки:

$$P_0 = \frac{2mV_{30}}{t_1} = 244.6 \text{ т.}$$

Статический прогиб будет вычисляться по формуле

$$w_{3st} = aP_0 = \frac{P_0}{k} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}\right) P_0 = 4.19 \text{ см.}$$

Определяя частоты колебаний по формуле $\omega(i) = \sqrt{\frac{24\lambda(i)D}{mh^3}}$, получим

$$\omega(1) = 10.445 \text{ с}^{-1}; \omega(2) = 24.53 \text{ с}^{-1}; \omega(3) = 40.62 \text{ с}^{-1}.$$

Тогда перемещение i -го этажа запишем через произвольные постоянные A_s , C_s и формы колебаний φ_{is} :

$$w_i(t) = \sum_{s=1}^n \varphi_{is} (A_s \sin(\omega(s)t) + C_s \cos(\omega(s)t));$$

$$w'_i(t) = \sum_{s=1}^n \varphi_{is} \omega(s) (A_s \cos(\omega(s)t) - C_s \sin(\omega(s)t))$$

Выполняя начальные условия $w_i(0) = 0$ см, $w'_i(0) = 30$ см/с, получим

$$C_s = 0, \{A_1 = -2.42192, A_2 = 0.64525, A_3 = 0.0752651\}.$$

Смещения этажей во времени описываются формулами:

$$w_1(t) = 0.520555 \sin(10.4454 t) - 0.325784 \sin(24.5369 t) + 0.062921 \sin(40.6275 t),$$

$$w_2(t) = 1.19317 \sin(10.4454 t) - 0.44074 \sin(24.5369 t) - 0.0405823 \sin(40.6275 t),$$

$$w_3(t) = 2.04231 \sin(10.4454 t) + 0.340529 \sin(24.5369 t) + 0.0076716 \sin(40.6275 t).$$

Смещение этажей здания в течение 1 с показано на рис. 5. Перемещение 3-го этажа – амплитуда самая большая, 2-го – амплитуда меньше, 1-го – самая малая. Колебания негармонические, хотя наблюдается периодичность для 3-го этажа приблизительно в 0.6 с ($T = 2\pi/10.4454 = 0.601$ с). В течение действия $t = 0.1$ с импульса смещение верхнего этажа возрастает до 2 см ($V_3(0.1) = 0$), а затем падает до нуля при $t = 0.3$ с. В дальнейшем по инерции 3-й этаж получает отрицательный прогиб, и по прошествии $t = 0.45$ с смещение достигает абсолютного максимума в 2.4 см. Колебания 2-го и 1-го этажей следуют за колебанием 3-го с некоторым сдвигом фаз. Наибольшая амплитуда по абсолютной величине у 3-го этажа наблюдается при $t = 0.449$ с, она равна динамическому прогибу $|w_{3d}(0.449)| = 2.38663$ см. Поэтому коэффициент динамичности составляет

$$\delta = \frac{|w_{3d}(0.449)|}{w_{3st}} = 0.57,$$

что согласуется с результатами [14] для колебаний с одной степенью свободы при действии треугольного импульса $\delta = 0.66$ при $t_1 / T = 0.2$.

Время относительного действия импульса к периоду основного тона составляет 0.2 периода:

$$\frac{t_1}{T} = \frac{t_1 \omega(1)}{2\pi} = 0.17 \approx 0.2.$$

Интересно отметить, что период колебаний приблизительно в 0.6 с сохраняется (рассеивание энергии отсутствует), тем не менее максимум смещения 3-го этажа в 2.38 см не достигается в течение даже 10 периодов колебаний из-за перекачивания энергии в увеличенные амплитуды 2-го и 1-го этажей.

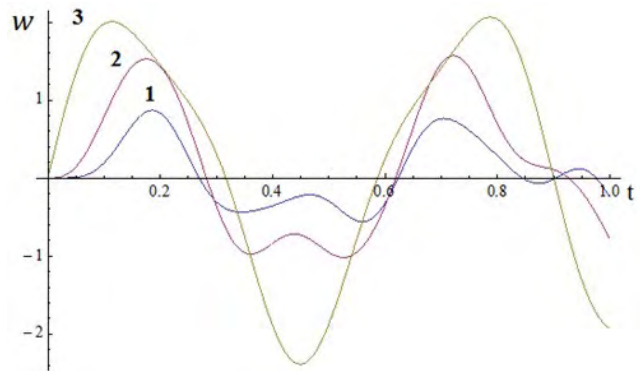


Рис. 5. Смещение первого (1), второго (2), третьего (3) этажей в течение 1 с.

Fig. 5. Displacement of the first (1), second (2), third (3) storey within 1 s.

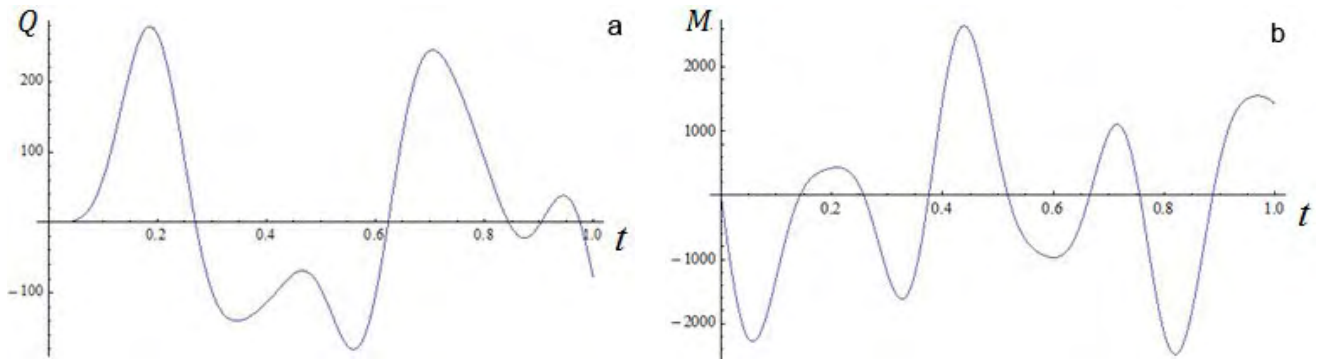


Рис. 6. Суммарная динамическая поперечная сила (а) и суммарный изгибающий момент (б) на фундаменте в течение 1 с.

Fig. 6. The total dynamic transverse force (a) and the total bending moment (b) on the foundation for 1 s.

На рис. 6 а показана суммарная динамическая поперечная сила Q на фундаменте в течение 1 с.

Максимальная поперечная сила Q достигает значения 278 т через 0.2 с. На рис. 6 б показан суммарный изгибающий момент M на фундаменте. Максимум изгибающего момента M_{max} возникает через 0.44 с (в этот момент верхний этаж получает максимальную амплитуду, а поперечная сила Q составляет 80 т) и получает значение 2644 т·м.

Колебания сооружений при импульсной нагрузке состоят из двух фаз: вынужденных колебаний и свободных. В случае действия относительно короткого импульса весь процесс нагружения вынужденных колебаний заканчивается значительно раньше, чем выполняется цикл свободных колебаний. Вынужденные колебания сообщают в конце своего действия начальные перемещения и скорости свободным колебаниям. Поэтому за короткое время действия нагрузки сооружение почти не деформируется. Максимальные амплитуды (деформации) достигаются лишь позже, в процессе свободных колебаний.

На рис. 7 приведена картина разрушений в г. Нагасаки вблизи места взрыва атомной бомбы. Обратите внимание, что дымовые трубы выдержали воздействие ударной волны и не пострадали, тогда как остальные здания разрушились. Этот факт можно объяснить, например, кратковременным импульсом нагрузки и запаздыванием развития деформаций во второй фазе колебаний. Это согласуется с выводами [14, 15] для треугольного импульса: при $t_1 / T < 0.4$ коэффициент динамичности $\delta < 1$.



Рис. 7. Картина разрушений в г. Нагасаки вблизи места взрыва атомной бомбы.

Fig. 7. The picture of destruction in Nagasaki city near the site of an atomic bomb explosion (<https://www.uatom.org/wp-content/uploads/2020/08/5.Torpednij-zavod-Mitsubisi-v-Nagasaki-pislya-vibuhu.jpg>).

Колебание небоскреба в 100 этажей

Допустим, что высотный дом в $n = 100$ этажей обладает следующими параметрами: вес каждого этажа $P = 500$ т, высота этажа $h_i = h = 5$ м = 500 см, относительные жесткости этажей $k_i = k = 321$ т·см, масса перекрытия $m = P/g = 0.509684$ т·с²/см, изгибная жесткость $D_i = D = k \frac{h^3}{24} = 1.67188 \cdot 10^9$ т·см².

Подсчитаем матрицу податливости по формуле (2.2):

$$[F] = a[F_i]; \quad a = \frac{h^3}{24d} = 0.00311526 \text{ см},$$

где $[F_i]$ – безразмерная матрица, имеющая 10 000 элементов. Используя матрицу масс $[M] = m[E]$ и матрицу жесткости $[K] = [F_i^{-1}]/a$, получим исходную матрицу прямого подхода $[M^{-1}][K]$, собственные значения которой являются квадратом круговой частоты колебаний небоскреба. Сокращенный список частот приведен ниже (от 0.4 с⁻¹ до 50 с⁻¹).

$$\omega(i) = \{0.39224, 1.17662, 1.96072, 2.74434, 3.52728, 4.30937, 5.0904, 5.87019, 6.64854, 7.42527, 8.20019, \langle\langle 78 \rangle\rangle, 49.4517, 49.5799, 49.6959, 49.7999, 49.8916, 49.9712, 50.0385, 50.0937, 50.1365, 50.1672, 50.1856\}.$$

Обозначение $\langle\langle 78 \rangle\rangle$ символизирует число промежуточных значений частот, расположенных между приведенными частотами.

Соответствующие им периоды колебаний находятся в интервале от 0.1 до 16 с:

$$T_i = 2\pi / \omega(i) = \{16.0187, 5.34002, 3.20453, 2.28951, 1.78131, 1.45803, 1.23432, 1.07036, 0.945047, 0.846189, 0.766224, \langle\langle 78 \rangle\rangle, 0.127057, 0.126729, 0.126433, 0.126169, 0.125937, 0.125736, 0.125567, 0.125429, 0.125321, 0.125245, 0.125199\}.$$

Приведем сокращенное число собственных векторов (векторов-строк) трех основных тонов небоскреба (рис. 8):

1-й тон

$$\{Q^1\}^T = (Q^1) = (\varphi_{11}, \varphi_{21}, \dots, \varphi_{100,1}) = \{0.00220479, 0.00440905, 0.00661223, 0.00881379, 0.0110132, 0.0132099, 0.0154034, 0.0175931, 0.0197786, 0.0219592, \langle\langle 80 \rangle\rangle, 0.139517, 0.139826, 0.140101, 0.140342, 0.140548, 0.14072, 0.140858, 0.140961, 0.14103, 0.141065\};$$

2-й тон

$$\{Q^2\}^T = (Q^2) = \{0.00661223, 0.0132099, 0.0197786, 0.0263038, 0.0327711, 0.0391664, 0.0454757, 0.0516849, 0.0577806, 0.0637492, \langle\langle 80 \rangle\rangle, -0.127303, -0.130012, -0.132435, -0.134568, -0.136404, -0.13794, -0.139174, -0.140101, -0.14072, -0.14103\};$$

3-й тон

$$\{Q^3\}^T = (Q^3) = \{-0.0110132, -0.0219592, -0.0327711, -0.043383, -0.0537301, -0.0637492, -0.0733791, -0.0825612, -0.0912393, -0.0993604, \langle\langle 80 \rangle\rangle, -0.103945, -0.111073, -0.117524, -0.123257, -0.128238, -0.132435, -0.135825, -0.138385, -0.140101, -0.140961\}.$$

Формы колебаний, соответствующие 1, 2 и 3-й низшим частотам, построены по 100 точкам и показаны на рис. 8. На горизонтальной оси указаны номера этажей, по вертикали – смещение.

Интересно построить высшие формы колебаний 98, 99 и 100-й частоты $\omega(100) = 50.186$ с⁻¹, $\omega(99) = 50.167$ с⁻¹, $\omega(98) = 50.137$ с⁻¹. Они имеют форму колебаний при явлении «биения», происходящем при сложении колебаний с одинаковыми амплитудами и незначительно различающимися частотами. Причем чем меньше разность частот, тем больше длина интервала биения. Эти формы колебаний показаны на рис. 9.

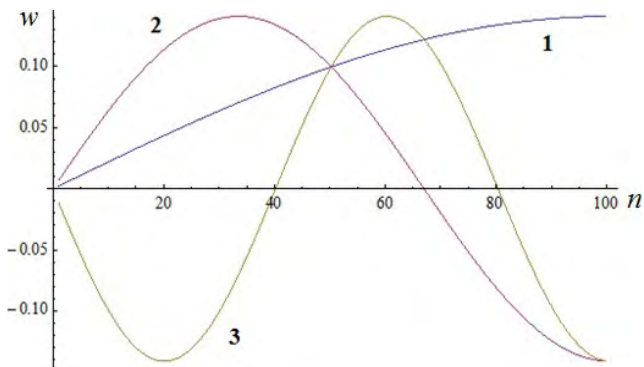


Рис. 8. Формы колебаний, соответствующие 1, 2 и 3-й низшим частотам.

Fig. 8. Oscillation forms corresponding to the 1st, 2nd and 3rd lower frequencies.

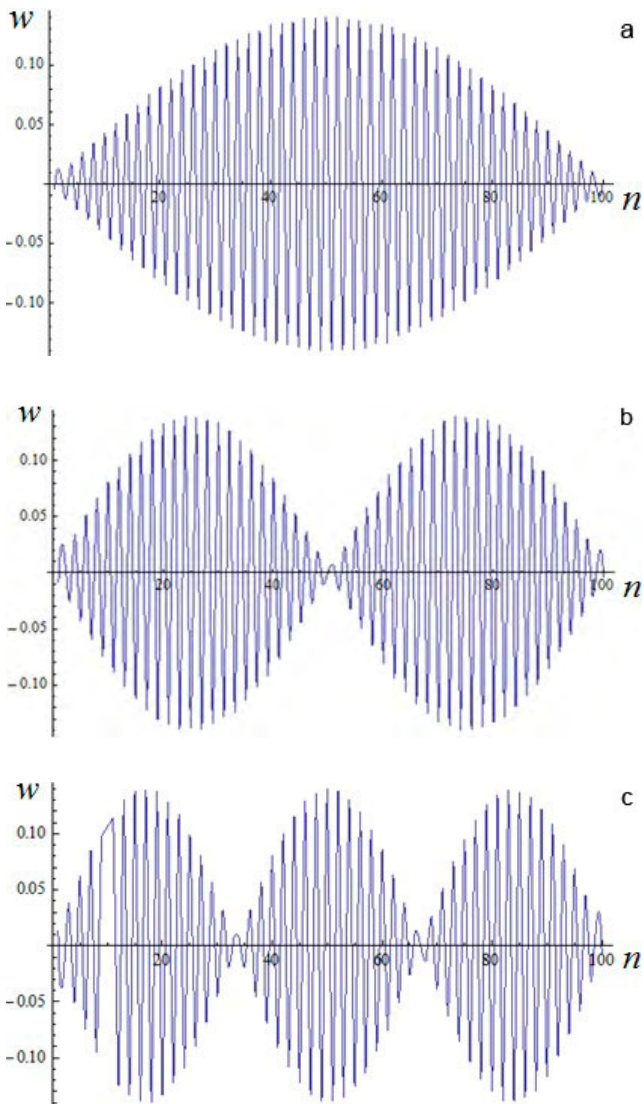


Рис. 9. Формы колебаний для $\omega(100)$ (a), $\omega(99)$ (b), $\omega(98)$ (c).

Fig. 9. Oscillation forms for $\omega(100)$ (a), $\omega(99)$ (b), $\omega(98)$ (c).

Заключение

В связи с тем, что получение точных решений при исследовании собственных и вынужденных колебаний многоэтажных зданий в рамках механики сплошных сред с бесконечным числом степеней свободы часто трудно-реализуемо, в статье сделана попытка наделить модель многоэтажных зданий конечным числом степеней свободы (модернизация метода конечных элементов): масса, размещенная в середине конечных элементов, помещена в некоторое число узлов, которые упруго взаимодействуют с элементами многоэтажных зданий, не имеющими массы. Элементы многоэтажных зданий работают только на изгиб.

С помощью уравнений Лагранжа 2-го рода получена разрешающая система дифференциальных уравнений колебаний многоэтажного здания, в которую в квадратурах записаны выражения для энергий (потенциальной, кинетической и Релея). В статье с использованием функций Грина, матриц жесткости, масс, податливости и др. решены задачи о свободных колебаниях 3- и 100-этажных зданий. Полученные в статье результаты при их сравнении с точными решениями, реализованными с помощью прямого и непрямого методов граничных элементов, а также с другими малоизвестными численными решениями показали хорошее соответствие.

Список литературы

1. Великанов П.Г., Артюхин Ю.П. 2023. Исследования по динамике рамных конструкций. *Геосистемы переходных зон*, 7(2): 180–195. <https://doi.org/10.30730/grtz.2023.7.2.180-195>; <https://www.elibrary.ru/lpplx>
2. Викторова Л.А. 2012. Высотные здания – плюсы и минусы строительства. *Архитектура и строительство России*, 10: 2–11.
3. Халикова А.С., Гамаюнова О.С. 2021. Особенности проектирования высотных зданий в сейсмических районах. *Инженерные исследования*, 5(5): 31–38.
4. Курбацкий Е.Н., Мазур Г.Э., Мондрус В.Л. 2017. Критический анализ состояния нормативной документации по расчету сооружений на землетрясения. *Природные и техногенные риски. Безопасность сооружений*, 2(28): 24–30.
5. Магай А.А. 2015. *Архитектурное проектирование высотных зданий и комплексов*. М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 328 с.

6. Артюхин Ю.П., Грибов А.П. **2002**. *Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов*. Казань: Фэн, 199 с.
7. Кацикаделис Дж.Т. **2007**. *Граничные элементы: Теория и приложения*: пер. с англ. М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 348 с.
8. Великанов П.Г., Артюхин Ю.П., Куканов Н.И. **2020**. Изгиб анизотропной пластины методом граничных элементов. В кн.: *Актуальные проблемы механики сплошных сред*. Казань: Изд-во Акад. наук РТ, с. 105–111.
9. Харрис С.М., Крид Ч.И. **1980**. *Справочник по ударным нагрузкам*. Сокр. перевод с англ. Н.А. Пэдуре. Л.: Судостроение, 358 с.
10. Бабаков И.М. **1958**. *Теория колебаний*: учеб. пособие для высш. техн. учеб. заведений. М.: Гостехиздат, 628 с.
11. Стеклов В.А. **1927**. *Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.; Л.: Госиздат, 419 с.
12. Артюхин Ю.П., Гурьянов Н.Г., Котляр Л.М. **2002**. *Система Математика 4.0 и ее приложения в механике*: учеб. пособие. Казань: Казанское мат. об-во: Изд-во КамПИ, 415 с.
13. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. **1985**. *Колебания в инженерном деле*. М.: Машиностроение, 472 с. http://www.physics.gov.az/book_K/Timoshenko.pdf
14. Клаф Р., Пензиен Дж. **1979**. *Динамика сооружений*. Пер. с англ. Л.Ш. Килимника и А.В. Швецовоной. М.: Стройиздат, 320 с.
15. Бишоп Р. **1986**. *Колебания*. М.: Наука, 189 с.
- 31–38. (In Russ.). EDN: PRJJEV; URL: <http://eng-res.ru/archive/2021/5/31-38.pdf>
4. Kurbatsky E.N., Mazur G.E., Mondrus V.L. **2017**. [Critical analysis of the state of regulatory documentation for the calculation of structures for earthquakes]. *Natural and Technological Risks. Building Safety*, 2(28): 24–30. (In Russ.). EDN: XYDNSH
5. Magay A.A. **2015**. [Architectural design of high-rise buildings and complexes]. Moscow: Izd-vo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov, 328 p. (In Russ.).
6. Artyukhin Yu.P., Gribov A.P. **2002**. [Solving problems of nonlinear deformation of plates and shallow shells by the boundary elements method]. Kazan: Fen, 199 p. (In Russ.).
7. Katsikadelis J.T. **2007**. *Boundary elements: Theory and applications*. Moscow: Izd-vo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov, 348 p. (In Russ.).
8. Velikanov P.G., Artyukhin Yu.P., Kukanov N.I. **2020**. Bending of an anisotropic plate by the method of boundary elements. In: [Actual problems of continuum mechanics]. Kazan: Publ. House of the Academy of Sciences of the Republic of Tatarstan, p. 105–111. (In Russ.).
9. Harris C.M., Creed Ch.I. **1980**. [Handbook of shock loads]. Leningrad: Sudostroenie, 358 p. (In Russ.). (Transl. from English: C.M. Harris, Ch.E. Crede (eds). **1976**. *Shock and vibration handbook*. Second ed. New York: McGraw-Hill, 1218 p.)
10. Babakov I.M. **1958**. [Theory of oscillations]: Textbook for higher tech. educational institutions. Moscow: Gostekhizdat, 628 p. (In Russ.).
11. Steklov V.A. **1927**. [Fundamentals of the integration theory of the ordinary differential equations]. Moscow; Leningrad: Gosizdat, 419 p. (In Russ.).
12. Artyukhin Y.P., Guryanov N.G., Kotlyar L.M. **2002**. [The Mathematics 4.0 system and its applications in mechanics]: Textbook. Kazan: Kazan Mathematical Society: Publ. House of CamPI, 415 p. (In Russ.).
13. Timoshenko S.P., Yang D.H., Weaver U. **1985**. *Vibration problems in engineering*. Moscow: Mashinostroenie, 472 p. (In Russ.). http://www.physics.gov.az/book_K/Timoshenko.pdf
14. Clough R.W., Penzien J. **1975**. *Dynamics of structures*. Moscow: Stroyizdat, 320 p.
15. Bishop R.E.D. **1965**. *Vibration*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 156 p.

References

1. Velikanov P.G., Artyukhin Yu.P. **2023**. Research on the dynamics of frame structures. *Geosistemy perhodnykh zon = Geosystems of Transition Zones*, 7(2): 180–195. (In Russ., abstr. in Engl.). <https://doi.org/10.30730/grtz.2023.7.2.180-195>; <https://www.elibrary.ru/llpxlp>
2. Viktorova L.A. **2012**. Tall buildings – the pros and cons of building. *Architecture and construction of Russia*, 10: 2–11. (In Russ.). EDN: PEJJDT
3. Khalikova A.S., Gamayunova O.S. **2021**. Features of designing high-rise buildings in seismic areas. *Inzhenernyye issledovaniya = Engineering Research*, 5(5):

Об авторах

Великанов Петр Геннадьевич (<https://orcid.org/0000-0003-0845-2880>), кандидат физико-математических наук, доцент, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, pvelikanov@mail.ru

Артюхин Юрий Павлович (<https://orcid.org/0000-0002-6243-9145>), доктор физико-математических наук, профессор, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, ArtukhinYP@mail.ru

Поступила 7.04.2023

Принята к публикации 26.05.2023

About the Authors

Velikanov, Peter G. (<https://orcid.org/0000-0003-0845-2880>), Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan; Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, pvelikanov@mail.ru

Artyukhin, Yury P. (<https://orcid.org/0000-0002-6243-9145>), Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, ArtukhinYP@mail.ru

Received 7 April 2023

Accepted 26 May 2023