

© Авторы 2023 г. Открытый доступ.
Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution
License 4.0 International (CC BY 4.0)



© The Authors 2023. Open access.
Content is available under Creative Commons Attribution
License 4.0 International (CC BY 4.0)

УДК 531.39

<https://doi.org/10.30730/gtr.2023.7.2.180-195>
<https://www.elibrary.ru/lpxlp>

Исследование по динамике рамных конструкций

П. Г. Великанов^{*1,2}, Ю. П. Артюхин²

*E-mail: pvelikanov@mail.ru

¹ Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Казань, Россия

² Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

Резюме. Определение собственных и вынужденных колебаний рамных конструкций, моделируемых стержнями с распределенными массами (бесконечное число степеней свободы), довольно затруднительно. Поэтому в статье модель рамы наделяют конечным числом степеней свободы: массу помещают в некоторое число узлов, которые упруго взаимодействуют со стержнями, не имеющими массы. Стержни работают только на изгиб. Продольные перемещения не учитываются, так как частота продольных колебаний на два порядка выше частоты изгибных колебаний. Такая модель приводит к составлению выражений кинетической и потенциальной энергии, позволяющих затем с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода получить систему дифференциальных уравнений колебаний сооружения. В статье с использованием функций Грина, матриц жесткости, масс, податливости и др. была решена задача о свободных колебаниях Г-образной рамы. Полученные приближенные результаты при сравнении с малоизвестными точными результатами показали хорошую сходимость, особенно при увеличении числа степеней свободы (количества сосредоточенных масс, моделирующих распределенную массу стержней Г-образной рамы).

Ключевые слова: колебания рам, частоты колебаний, функция Грина, матрица жесткости, матрица масс, матрица податливости

Research on the dynamics of frame structures

Peter G. Velikanov^{*1,2}, Yury P. Artyukhin²

*E-mail: pvelikanov@mail.ru

¹ Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan, Russia

² Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russia

Abstract. Determining the natural and forced oscillations of frame structures simulated by the rods with distributed masses (an infinite number of degrees of freedom) is quite difficult. Therefore, in the article, the frame model is endowed with a finite number of degrees of freedom: the mass is placed in a certain number of nodes that elastically interact with rods that have no mass. The rods work only for bending. Longitudinal displacements are not taken into account, since the frequency of longitudinal oscillations is two orders of magnitude higher than the frequency of bending ones. Such a model leads to the construction of expressions of the kinetic and potential energy, which then allows using the Lagrange equations of second kind to obtain a system of differential oscillation equations of the structure. The problem of free oscillations of the G-shaped frame was solved in the article using Green's functions, matrices of stiffness, masses, malleability, etc. The obtained approximate results were compared with little-known exact results and demonstrated good convergence, especially with an increase in the number of degrees of freedom (the number of concentrated masses simulating the distributed mass of the rods of the G-shaped frame).

Keywords: oscillations of frames, oscillation frequencies, Green's function, stiffness matrix, mass matrix, malleability matrix

Для цитирования: Великанов П.Г., Артюхин Ю.П. Исследование по динамике рамных конструкций. *Геосистемы переходных зон*, 2023, т. 7, № 2, с. 180–195. <https://doi.org/10.30730/gtr.2023.7.2.180-195>; <https://www.elibrary.ru/lpxlp>

For citation: Velikanov P.G., Artyukhin Yu.P. Research on the dynamics of frame structures. *Geosistemy perhodnykh zon = Geosystems of Transition Zones*, 2023, vol. 7, no. 2, pp. 180–195. (In Russ.). <https://doi.org/10.30730/gtr.2023.7.2.180-195>; <https://www.elibrary.ru/lpxlp>

Введение

Колебательные и волновые процессы в технике играют двоякую роль: с одной стороны, например, колебания валов двигателей, вибрации корпусов, мостовых сооружений и т.д. при неблагоприятных условиях могут вызвать опасные напряжения, деформации и износ, с другой – колебания, например, используют для осуществления эффективных технологических процессов (вибрационное погружение свай, виброзапрессовка деталей, виброуплотнители грунта, вибрационное транспортирование грузов, вибрационные тепло- и массообменные аппараты и т.д.) [1–7].

Анализ колебательных и волновых процессов показал, что между колебаниями разной физической природы чрезвычайно много общего. Конкретные колебательные и волновые процессы, с которыми приходится иметь дело специалистам в технике, различны, однако колебательные и волновые явления, в них происходящие, подчиняются общим закономерностям и описываются едиными моделями.

В технике мы редко встречаемся со свободными колебаниями: вибрация машин вызывается, как правило, каким-либо источником энергии. Между тем поведение системы при свободных колебаниях – это характеристика ее собственных свойств, недаром частота свободных колебаний называется собственной частотой системы. Частота собственных колебаний является важнейшей динамической характеристикой сооружений, поскольку ее величина значительно влияет на расчетные значения нагрузок. Ошибки, допущенные на стадии вычисления частоты собственных колебаний, приводят к неправильному определению напряженно-деформированного состояния несущих конструкций. Помимо этого, неверное определение собственной частоты колебаний может привести к возникновению не спрогнозированных резонансных явлений, которые являются достаточно опасными. В свете вышесказанного исследование в статье свободных колебаний рамных конструкций представляется актуальным.

Аналитическое (точное) решение поставленной задачи может быть получено, если: область однородная, геометрия проста (регулярна), граничные условия на контуре сравнительно просты, определяющие дифференциальные уравнения линейны. В противном случае могут быть использованы численные методы для нахождения численного решения. Численные методы отчетливо делятся на два класса: класс, требующий аппроксимации во всей области (метод конечных разностей, метод конечных элементов (МКЭ)), и класс, требующий аппроксимации только на границе области (метод граничных элементов).

МКЭ (в зависимости от приложений и взглядов исследователя может быть интерпретирован как метод возможной работы, вариационно-разностный метод, метод взвешенных невязок (метод Бубнова–Галеркина)) дает решение, которое всегда несколько отличается от точного решения. Величина ошибки зависит от многих факторов самой разнообразной природы, среди которых важнейшие: 1) размеры и число узлов отдельных конечных элементов; 2) аппроксимирующие функции внутри отдельных конечных элементов; 3) особенности вычисления матрицы жесткости; 4) алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ); 5) качество программ; 6) тип используемой ЭВМ.

Практика использования МКЭ показывает, что следует обратить особое внимание на второй из вышеперечисленных пунктов. Неудачный выбор аппроксимирующих функций приводит к очень медленной сходимости, что в свою очередь приводит к необходимости мелкого дробления тела на конечные элементы и, как следствие, к неоправданным вычислительным расходам на решение задач. Более того, иногда наблюдается сходимость не к точному, а к некоторому другому решению, что недопустимо (поэтому в МКЭ необходимо внимательно следить за тем, чтобы при конечноэлементной дискретизации выполнялись условия совместности (согласованности, конформности), совместности, необходимой степени параметризации и др.).

В процессе реализации численных методов и созданных на их основе алгоритмов расчета сложных структур постепенно пришло понимание того обстоятельства, что не существует ни одного метода, обладающего бесспорными преимуществами при решении бесконечного разнообразия технических проблем. Это заставило обратить внимание на альтернативные варианты «гибридизации» различных методов в целях использования их преимуществ и компенсации слабых сторон.

Представление исследуемой области совокупностью подобластей (как, например, в МКЭ) имеет смысл дискретизации континуальной задачи с заменой реальной области тела с бесконечным числом степеней свободы приближенно эквивалентным телом с большим, но конечным числом степеней свободы.

Исследование в статье свободных колебаний рамных конструкций было реализовано с помощью сравнения аналитического (точного) решения с численными решениями: МКЭ, реализованного в Ansys (узлы конечных элементов рамных конструкций размещены на их границах), и его модернизации («гибридизации») (массу конечных элементов помещают в их середине и называют узлами, которые

упруго взаимодействуют со стержнями рамы, не имеющими массы).

В настоящее время считается классическим получение элементов матрицы податливости (коэффициентов влияния) с помощью следующей методики: к каждой из масс, на которые действуют внешние силы, прикладывают единичную силу и отдельно для каждой единичной силы строят эпюру изгибающих моментов; затем по правилу Верещагина (перемножением площадей этих эпюр на координаты под центрами их тяжести) или Симпсона находят искомые элементы матрицы. В предложенной статье искомые элементы матрицы податливости определяются через функцию Грина, что сокращает предварительные вычисления [1, 8–11].

Как будет показано, результаты обоих численных методов (МКЭ и его модернизации – «гибридизации») для одинакового числа конечных элементов практически идентичны (и хорошо согласуются с аналитическим (точным) решением), в то время как размерности СЛАУ существенно различаются (так как число степеней свободы в МКЭ всегда значительно больше числа степеней свободы в его модернизации).

1. Постановка и решение задач

Допустим, что механическая система имеет n степеней свободы и ее кинетическая (T) и потенциальная (Π) энергии имеют вид квадратичных функций:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j; \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} x_i x_j, \quad (1.1)$$

где x_i, \dot{x}_i – поперечные перемещения и скорости перемещений сосредоточенных масс сооружений; m_{ij}, k_{ij} – компоненты матрицы масс $[M]$ и матрицы жесткости $[K]$ соответственно.

Если при движении система рассеивает энергию, то к соотношениям (1.1) следует добавить квадратичную функцию рассеивания энергии Релея:

$$Rel = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad (1.2)$$

где r_{ij} – компоненты матрицы рассеивания $[R]$.

Введем вектор-строку $(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и вектор-столбец $\{x\}$ такой, что $\{x\}^T = (x)$. Тогда квадратичные функции (1.1), (1.2) можно представить в матричной форме

$$2T = ([M]\{\dot{x}\})\{\dot{x}\} = (\dot{x})\{[M]^T\{\dot{x}\}\}; 2\Pi = ([K]\{x\})\{x\}; 2Rel = ([R]\{\dot{x}\})\{\dot{x}\}. \quad (1.3)$$

Используя уравнения Лагранжа 2-го рода $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\{\dot{x}\}}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial\{x\}}\right) = \{P\} - \left(\frac{\partial\Pi}{\partial\{x\}}\right) - \left(\frac{\partial Rel}{\partial\{\dot{x}\}}\right)$

и соотношения (1.3), запишем дифференциальные уравнения колебаний системы в матричной форме, используя дифференцирование квадратичных форм по вектору-столбцу [11]:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [R]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{P\}, \quad (1.4)$$

где $\{P\} = (P_1, P_2, \dots, P_n)^T$ – вектор-столбец внешних нагрузок, приложенных к массам.

1.1 Задача о собственных значениях

Если рассматривать свободные колебания без учета рассеивания энергии, уравнение (1.4) примет вид

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0. \quad (1.5)$$

Предполагая, что матрицы масс $[M]$ и жесткости $[K]$ не зависят от времени t , будем искать частное решение уравнения (1.5) в виде $\{x\} = \{B\}e^{i\omega t}$, причем $\{B\} = (B_1, B_2, \dots, B_n)^T$ – произвольный вектор-столбец. Тогда задача сводится к решению системы однородных уравнений относительно амплитуд B_k :

$$([K_1] - \lambda[M_1])\{B\} = 0; \lambda = \frac{\omega^2 l^3 m}{d}; [M] = m[M_1]; [K] = \frac{d}{l^3}[K_1], \quad (1.6)$$

где $[M_1], [K_1]$ – безразмерные матрицы масс и жесткости соответственно; ω – частота колебаний; l – длина произвольного элемента; d – изгибная жесткость произвольного элемента; m – стандартная сосредоточенная масса, приложенная в середине элемента.

1.2 Прямой подход к определению собственных колебаний

Если безразмерная матрица масс представляет собой единичную матрицу $[M_1] = [E]$, то приходим к стандартной процедуре определения собственных значений λ и собственных векторов (амплитуд) $\{B\}$ для матрицы жесткости $[K]$ из решения однородной системы уравнений

$$(k_{ij} - \lambda\delta_i^j)B_j = 0; (i, j = \overline{1, n}), \quad (1.7)$$

где δ_i^j – символ Кронекера.

Так как $B_j \neq 0$, то решение системы (1.7) возможно при условии равенства нулю характеристического уравнения, полученного из определителя

$$|[K] - \lambda[E]| = 0. \quad (1.8)$$

Если $[M_1] \neq [E]$, то преобразуем уравнение (1.5) к виду

$$[E]\{\ddot{x}\} + [M]^{-1}[K]\{x\} = 0$$

и будем искать собственные значения матрицы $[M]^{-1}[K]$.

Частота свободных колебаний найдется по формуле

$$\omega = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{\lambda d}{lm}}, \quad (1.9)$$

где $d = EI$; E – модуль упругости Юнга (модуль упругости первого рода), а I – осевой момент инерции поперечного сечения.

Определитель (1.8) относительно λ дает полином n -го порядка. Корни этого полинома будут вещественными, так как матрица жесткости является симметричной. Пусть все эти корни простые и различные $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Тогда, подставляя значение одного из корней в (1.7), можно определить с точностью до одной произвольной постоянной вектор-столбец $\{Q^i\} = \{B\}|_{\lambda=\lambda_i}$ который удовлетворяет матричному соотношению $[K]\{Q^i\} = \lambda_i\{Q^i\}$; ($i = \overline{1, n}$).

Иногда удобнее собственные векторы $\{Q^i\}$ нормировать, т.е. сделать по модулю равными единице.

Введем матрицу $[Q] = [\{Q^1\}, \{Q^2\}, \dots, \{Q^n\}]$, состоящую из собственных векторов-столбцов матрицы жесткости (в теории колебаний ее называют модальной матрицей). Тогда предыдущее соотношение можно записать для всего набора собственных чисел λ :

$$[K][Q] = [Q][J], \quad (1.10)$$

$$\text{где } [J] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Матрица $[J]$ называется жордановой матрицей (в теории колебаний – спектральная матрица) и представляет собой диагональную матрицу с расположением по главной диагонали собственных значений и нулями вне диагонали. Из (1.10) следует, что спектральная матрица может быть получена произведением матриц:

$$[J] = [Q]^{-1}[K][Q], \quad (1.11)$$

где $[Q]^{-1}$ – обратная матрица.

1.3 Обратный подход к определению собственных колебаний

Другой способ определения частот и форм свободных колебаний состоит в приведении уравнения (1.5) к виду

$$[D_d]\{\ddot{x}\} + [E]\{x\} = 0, \quad (1.12)$$

где $[D_d] = [F][M]$ – динамическая матрица; $[F] = [K]^{-1}$ – матрица податливости.

Отыскивая решение уравнения (1.12) в форме $\{x\} = \{B\}e^{i\omega t}$, снова придем к стандартной процедуре определения λ_1 матрицы $[D_1]$:

$$([D_1] - \lambda_1[E])\{B\} = 0; \lambda_1 = \frac{\omega_1^2 d}{l^3 m}; \omega = \frac{1}{\omega_1}; [D_1] = [K_1]^{-1}[M_1]. \quad (1.13)$$

Здесь собственное число λ_1 безразмерной динамической матрицы $[D_1]$ выражается через квадрат обратной частоты колебаний, а формы (амплитуды) отличаются знаком:

$$\omega = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{EI}{lm\lambda_1}}; \lambda = \frac{1}{\lambda_1}. \quad (1.14)$$

1.4 Общее решение уравнений свободных колебаний

Частное решение уравнения (1.5), соответствующее некоторой частоте ω_s , имеет вид

$$x_{si} = \varphi_{is} \sin(\omega_s t + \alpha_s); (i, s = \overline{1, n}), \quad (1.15a)$$

где φ_{is} – элементы модальной матрицы (амплитуд собственных форм колебаний), $[\varphi_{is}] = [Q]$, α_s – сдвиг фазы. Выражение (1.15a) характеризует главное колебание частоты ω_s , когда другие частоты не учитываются. Все массы в этом случае колеблются по гармоническому закону с одинаковой частотой $\omega_s = \sqrt{\lambda_s}$ и фазой α_s .

Общее решение уравнения (1.5) запишем в виде [12]

$$x_i = \sum_{s=1}^n A_s \varphi_{is} \sin(\omega_s t + \alpha_s), \quad (1.15b)$$

где A_s, α_s – произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий для отклонений x_{i0} и скоростей \dot{x}_{i0} из системы $2n$ уравнений:

$$x_{i0} = \sum_{s=1}^n A_s \varphi_{is} \sin \alpha_s; \quad \dot{x}_{i0} = \sum_{s=1}^n A_s \omega_s \varphi_{is} \cos \alpha_s.$$

Формы колебаний φ_{is} не зависят от начальных условий движения, но влияют только на постоянные A_s и α_s .

Более удобным является другой вид общего решения с произвольными постоянными A_s, C_s :

$$x_i(t) = \sum_{s=1}^n \varphi_{is} (A_s \sin \sqrt{\lambda_s} t + C_s \cos \sqrt{\lambda_s} t). \quad (1.15c)$$

1.5 Условия ортогональности форм колебаний

Для колебания стержней с распределенными массами формы колебаний $\varphi_m(x)$ обладают свойством ортогональности вида [13]

$$\int_0^l p(x) \varphi_r(x) \varphi_s(x) dx = 0; (r \neq s). \quad (1.16a)$$

Так как по длине стержня проведена дискретизация по x_i точкам, то интеграл (1.16a) необходимо заменить суммой по $i = \overline{1, n}$. Роль весовой функции $p(x)$ выполняют компоненты матрицы масс. Условия ортогональности при этом примут вид

$$\sum_{i=1}^n \varphi_r(x_i) m_{is} \varphi_s(x_i) = 0; \quad (r \neq s) \quad (1.16b)$$

или

$$\{Q^r\}^T [M] \{Q^s\} = 0. \quad (1.16c)$$

Если $[M]$ – единичная матрица, то

$$\{Q^r\}^T \{Q^s\} = \sum_i^n \varphi_{ir} \varphi_{si} = 0, \quad r \neq s. \quad (1.16d)$$

Свойство (1.16a), (1.16b) позволяет при вычислении уравнений (1.16c), (1.16d) получать произвольные постоянные для больших систем уравнений в явном виде.

1.6 Функция Грина и матрица податливости

Матрица масс чаще всего является диагональной матрицей, поэтому основная трудность задачи колебаний сооружений состоит в определении матрицы податливости $[F] = [\delta_{ik}]$. Матрица податливости будет симметричной матрицей на основе теоремы Максвелла о взаимности перемещений $\delta_{ik} = \delta_{ki}$. Компоненты матрицы податливости есть перемещения сооружения в точке i под действием единичной нагрузки в точке k .

Для описания перемещений в трехмерном деформированном теле существует функция Грина. Представим себе закрепленное тело, отнесенное к декартовой системе координат $x = (x_1, x_2, x_3)$. Пусть в точке $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ действует единичная сила, параллельная оси x_k . Обозначим перемещение в точке x под действием единичной сосредоточенной силы в точке ξ вектором $\bar{G}^{(k)}(x, \xi)$. Здесь индекс k показывает причину перемещения. Символ x обозначает текущую точку, символ ξ – место приложения силы. Вектор $\bar{G}^{(k)}(x, \xi)$ называют вектором Грина. Если записать его проекции, то при переборе $k = 1, 2, 3$ получим тензор Грина $[G_i^{(k)}]$, $i = 1, 2, 3$. Функции $G_i^{(k)}$ называются функциями перемещений Грина.

Применим теорему Бетти о взаимности работ к двум системам сил: единичная сила, действующая в точке ξ , параллельная оси x_k , и единичная сила, действующая в точке x , параллельная оси x_j , и получим теорему Максвелла о взаимности перемещений для сосредоточенных сил:

$$G_k^{(j)}(x, \xi) = G_j^{(k)}(\xi, x), \quad (1.17)$$

из которой следует, что проекция перемещений на x_k -е направление в точке x от действия единичной нагрузки в точке ξ , параллельной x_j , равна проекции перемещений на x_j -е направление в точке ξ от действия единичной нагрузки в точке x , параллельной x_k . В строительной механике равенство (1.17) обычно записывают $\delta_{kj} = \delta_{jk}$. Фактически функции перемещений Грина (матрица Грина) есть не что иное, как компоненты матрицы податливости.

1.7 Инструмент численной реализации задачи о собственных значениях

Численную реализацию задачи о собственных значениях стандартной процедуры в виде уравнений (1.6) или (1.13) удобно делать с помощью функций пакета символьной математики (ПСМ) «WolframMathematica» [14]. Например, использование функций:

Eigenvalues[K] – выводит в порядке убывания собственные значения $\lambda = (\lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_2, \lambda_1)$ матрицы $[K]$;

Eigenvectors[K] – выводит собственные векторы матрицы $[K]$, соответствующие собственным значениям модальной матрицы ($\{Q^n\}, \dots, \{Q^2\}, \{Q^1\}$);

Eigensystem[K] – выводит одновременно собственные значения и собственные векторы;

JordanDecomposition[K] – выводит сначала модальную матрицу векторов-столбцов $[Q]$, а затем спектральную матрицу $[J]$

Normalize[n] – нормирование вектора n ;

DiagonalMatrix[$\{m\}$] – создает диагональную матрицу с диагональю $\{m\}$.

2. Динамика Г-образной рамы

Задача распределения массы в рамах наталкивается на преодоление следующего затруднения. Для оценки этого распределения необходимо иметь точное решение задачи о свободных колебаниях рамы с равномерно распределенной массой. К сожалению, в литературе даны общие рекомендации по построению частотных соотношений и некоторые частные результаты для симметричных и антисимметричных колебаний. В результате поисков удалось обнаружить частотное соотношение для Г-образной рамы в [15] со ссылкой на [16]. При сравнении решения задачи о колебаниях Г-образной рамы, несущей сосредоточенные массы, с точным решением предварительно необходимо иметь уверенность, что в [15, 16] нет ошибок (опечаток).

Рассмотрим динамику сооружения, представляющего собой некоторый пристрой к основному сооружению, в виде рамы с вертикальной стойкой длины L_1 изгибной жесткости D_1 , обладающей массой на единицу длины m_1 , и горизонтальным ригелем длины L_2 жесткости D_2 , обладающей массой на единицу длины m_2 (рис. 1). Вертикальная стойка закреплена, горизонтальный ригель опирается на стену. Колебания рамы состоят из изгибных и продольных колебаний. Анализ показывает, что отношение частот ω_r изгибных колебаний к продольным ω_n равно [17]

$$\frac{\omega_r}{\omega_n} = \frac{\frac{\beta_r^2}{L^2} \sqrt{\frac{D}{\rho}}}{\left(\frac{n\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}\right)} = \frac{\beta_r^2}{\sqrt{3}\pi} \frac{h}{L}, \quad (n, r = 1, 2, 3 \dots),$$

где ρ_0 – масса в единице объема, $\rho = m$ – масса в единице длины.

Последнее равенство принято при $n = 1$ и для прямоугольного поперечного сечения. Откуда следует, что частота продольных колебаний на два порядка больше частоты изгибных колебаний. Поэтому обычно при колебании рам учитывают лишь изгибные колебания, описываемые уравнением

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (2.1)$$

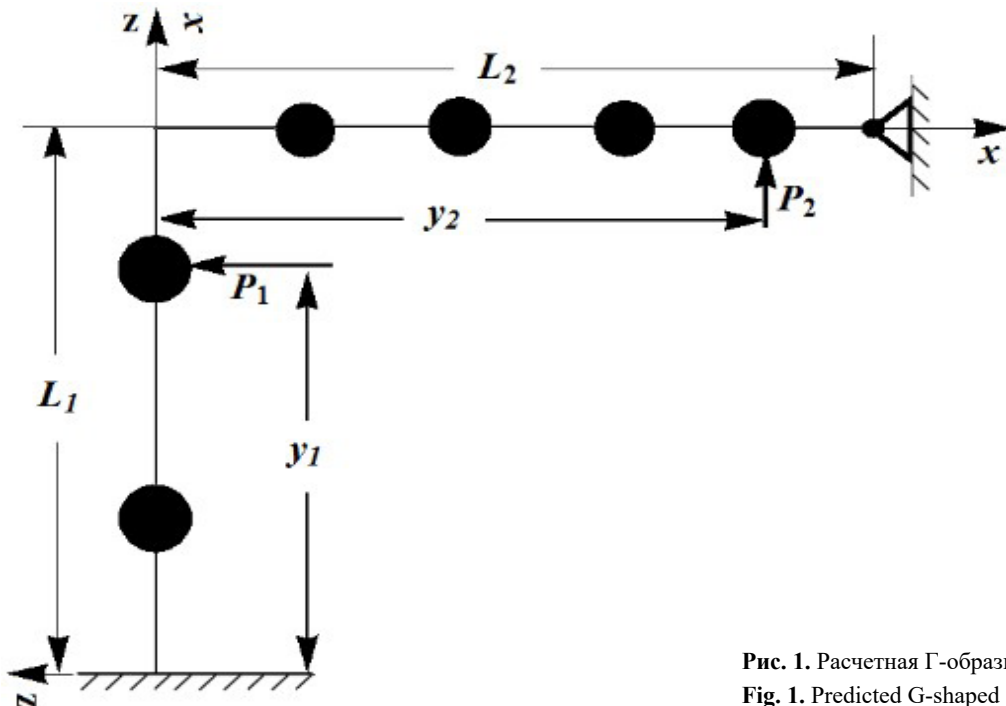


Рис. 1. Расчетная Г-образная рама.
Fig. 1. Predicted G-shaped frame.

Ищем решение (2.1) в виде $w(x, t) = W(x) e^{i\omega t}$. Тогда из (2.1) следует статическое соотношение вида

$$DW^{IV}(x) + q_{\text{ин}}(x) = 0,$$

где $q_{\text{ин}}(x) = -m\omega^2 W(x)$.

Силы инерции $q_{\text{ин}}(x)$ являются аналогом упругого основания с коэффициентом постели k (однопараметрическим упругим основанием Винклера) [18]. Следовательно,

$$W^{IV}(x) - k^4 W(x) = 0, \quad (2.2)$$

где $k^4 = \frac{m}{D} \omega^2$.

Решение уравнения (2.2) выражается с помощью функций Крылова:

$$\begin{aligned} W(x) &= W(0)S(kx) + \frac{W'(0)}{k}T(kx) + \frac{W''(0)}{k^2}U(kx) + \frac{W'''(0)}{k^3}V(kx); \\ W'(x) &= W(0)kV(kx) + W'(0)S(kx) + \frac{W''(0)}{k}T(kx) + \frac{W'''(0)}{k^2}U(kx); \\ W''(0) &= W(0)k^2U(kx) + W'(0)kV(kx) + W''(0)S(kx) + \frac{W'''(0)}{k}T(kx); \\ W'''(x) &= W(0)k^3T(kx) + W'(0)k^2U(kx) + W''(0)kV(kx) + W'''(0)S(kx), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где функции Крылова имеют вид

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2}(chx + \cos x); T(x) = \frac{1}{2}(shx + \sin x); \\ U(x) &= \frac{1}{2}(chx - \cos x); V(x) = \frac{1}{2}(shx - \sin x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

и обладают следующими свойствами

$$\begin{aligned} S(0) &= 1; T(0) = U(0) = V(0) = 0; S'_x(kx) = kV(kx); T'_x(kx) = kS(kx); \\ U'_x(kx) &= kT(kx); V'_x(kx) = kU(kx); S(x)T(x) - U(x)V(x) = \frac{1}{2}(chx \sin x + shx \cos x); \\ T(x)U(x) - S(x)V(x) &= \frac{1}{2}(chx \sin x - shx \cos x); \\ S^2(x) - U^2(x) &= chx \cos x; T^2(x) - V^2(x) = shx \sin x; \\ U^2(x) - T(x)V(x) &= \frac{1}{2}(1 - chx \cos x); S^2(x) - T(x)V(x) = \frac{1}{2}(1 + chx \cos x). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Изгибающие моменты и поперечные (перерезывающие) силы находятся по формулам:

$$M(x, t) = -D \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}; Q(x, t) = -D \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3}.$$

Введем локальные координаты x и z , жестко связанные со стойкой и ригелем. Динамический прогиб вертикальной стойки в локальной системе координат с учетом начальных параметров $W_1(0) = W'_1(0) = 0$ и формул (2.3) получит вид

$$W_1(x) = \frac{W'''_1(0)}{k_1^2} U(k_1 x) + \frac{W''_1(0)}{k_1^3} V(k_1 x), \quad (2.6)$$

где $k_i = \sqrt[4]{\frac{m_i \omega^2}{D_i}}$; ($i = 1, 2$).

Динамический прогиб горизонтального ригеля в локальной системе координат при $W_2(0) = 0$ равен

$$W_2(x) = \frac{W_2'(0)}{k_2} T(k_2 x) + \frac{W_2''(0)}{k_2^2} U(k_2 x) + \frac{W_2'''(0)}{k_2^3} V(k_2 x). \quad (2.7)$$

Прогибы выражаются через пять неизвестных начальных параметров: $W_1''(0), W_1'''(0), W_2'(0), W_2''(0), W_2'''(0)$ и частоту ω , которые определим из условий контакта в точке жесткого соединения балок (равенства прогибов, углов поворота, моментов):

$$W_1(L_1) = W_2(0) = 0; W_1'(L_1) = W_2'(0); D_1 W_1''(L_1) = D_2 W_2''(0) \quad (2.8)$$

и условия шарнирного закрепления рамы

$$W_2(L_2) = 0; W_2''(L_2) = 0. \quad (2.9)$$

Используя (2.6)–(2.9) и исключая последовательно начальные параметры, получим:

$$\left[(U^2 - VT)(\beta_1)(T^2 - V^2)(\beta_2) + \left(\frac{D_1 k_1}{D_2 k_2} \right) (TU - SV)(\beta_1)(TU - SV)(\beta_2) \right] \frac{W_1'''(0)}{U(\beta_1)T(\beta_2)} = 0,$$

где $\beta_i = L_i \sqrt[4]{\frac{m_i \omega^2}{D_i}}$; ($i = 1, 2$).

Учитывая, что $W_1'''(0) \neq 0, U(\beta_1) \neq 0, T(\beta_2) \neq 0$, получим трансцендентное уравнение для определения частоты ω :

$$\left(\frac{D_2 k_2}{D_1 k_1} \right) \frac{(T^2 - V^2)(\beta_2)}{(TU - SV)(\beta_2)} + \frac{(TU - SV)(\beta_1)}{(U^2 - VT)(\beta_1)} = 0.$$

Пользуясь свойствами функций Крылова (2.5), окончательно находим:

$$\frac{ch\beta_1 \sin\beta_1 - sh\beta_1 \cos\beta_1}{ch\beta_1 \cos\beta_1 - 1} = \frac{D_2}{D_1} \sqrt[4]{\frac{m_2 D_1}{D_2 m_1}} \frac{2sh\beta_2 \sin\beta_2}{(ch\beta_2 \sin\beta_2 - sh\beta_2 \cos\beta_2)}, \quad (2.10)$$

где $\beta_1 = L_1 \sqrt[4]{\frac{m_1 \omega^2}{D_1}}$; $\beta_2 = \frac{L_2}{L_1} \sqrt[4]{\frac{m_2 D_1}{D_2 m_1}} \beta_1$; частота равна $\omega = \frac{\beta_1^2}{L_1^2} \sqrt{\frac{D_1}{m_1}}$.

Частотное уравнение (2.10) не отличается от выражения, приведенного в [15, 16]. В частном случае $D_1 = D_2; m_1 = m_2; L_2 = 2L_1$ частотные коэффициенты примут вид $\beta_2 = 2\beta_1$. При этом предположении в [15, 16] получено два частотных коэффициента $\beta_1 = \{1.809, 3.2804\}$ первого и второго тона. Формы колебаний в [15, 16] не рассматривались.

С помощью встроенных функций ПСМ «WolframMathematica» $FindRoot[Eq, \{\beta, \beta_0\}]$ были получены 6 основных частотных коэффициентов колебаний рамы $\beta_1 = \beta, \beta_0$ – окрестность параметра, где происходит процесс нахождения корня:

$$\{1.80977, 3.28039, 4.27789, 5.01377, 6.4288, 7.40966\}.$$

Определим формы колебаний рамы. Из условий $W_1(L_1) = 0$ следует

$$W_1''(0) = -\frac{W_1'''(0) V(\beta_1)}{k_1 U(\beta_1)}.$$

Тогда форму колебаний стойки можно представить в виде

$$W_1(x) = C \left(V(k_1 x) - \frac{V(\beta_1)}{U(\beta_1)} U(k_1 x) \right); C = \frac{W_1'''(0)}{k_1^3}.$$

Выражая в (2.7) все начальные параметры через один $W_1'''(0)$, получим форму колебаний ригеля:

$$W_2(x) = C \frac{k_1}{k_2} \left\{ A(\beta_1) \left(T(k_2 x) - \frac{V(\beta_2)}{T(\beta_2)} V(k_2 x) \right) + \left(\frac{D_1 k_1}{D_2 k_2} \right) B(\beta_1) \left(U(k_2 x) - \frac{S(\beta_2)}{T(\beta_2)} V(k_2 x) \right) \right\},$$

где $A(\beta_1) = \frac{(U^2 - VT)(\beta_1)}{U(\beta_1)}$; $B(\beta_1) = \frac{(TU - SV)(\beta_1)}{U(\beta_1)}$.

Каждой частоте ω_i ($i = \overline{1,6}$) отвечает своя форма колебаний $W_1^i(x)$, $W_2^i(x)$.

Формы колебаний определяются с точностью до множителя C , который в дальнейшем прием равным единице. Введем безразмерную длину $\xi = x/L_1$. Тогда $k_1 x = \beta_1 \xi$. Приравнивая множитель $C = 1$, определим i -ю форму колебаний стойки:

$$y(\xi, i) = V(\beta(i)\xi) - \left(V(\beta(i))/U(\beta(i)) \right) U(\beta(i)\xi).$$

Прогиб горизонтального ригеля будем вычислять в тех же локальных безразмерных координатах. В нашем примере $k_1/k_2 = 1$; $d_1 k_1/(d_2 k_2) = 1$; $\beta_1 = \beta$; $\beta_2 = 2\beta$. Полагая для любой частоты $C = 1$, $k_2 x = \beta \xi$, найдем форму колебаний ригеля для i -й частоты:

$$z(\xi, i) = \left((U^2 - TV)(\beta(i)) \left(T(\beta(i)\xi) - \left(V(2\beta(i))/T(2\beta(i)) \right) \right) V(\beta(i)\xi) + \right. \\ \left. + (TU - SV)(\beta(i)) \left(U(\beta(i)\xi) - \left(S(2\beta(i))/T(2\beta(i)) \right) \right) V(\beta(i)\xi) \right) / U(\beta(i)).$$

Если отсчитывать координату ξ для стойки и ригеля от начала заделки как безразмерную длину дуги периметра рамы, то можно изобразить форму колебаний рамы на одном рисунке, причем область изменения прогибов будет $0 \leq \xi \leq 3$. Шесть форм колебаний отражены на рис. 2.

Анализ полученных шести форм колебаний показывает: при первых трех частотах по вертикальной стойке рамы пробегает одна полуволна, постепенно увеличивая амплитуду. Только начиная с четвертой частоты появляются две полуволны, постепенно увеличивая амплитуду до шестой частоты. На ригеле рамы возникает вначале одна полуволна с большой амплитудой, затем амплитуда падает с увеличением полуволн пропорционально частоте.

Сделаем расчет динамики рамы в нашем случае, распределяя массу следующим образом. Стойку разделим на два элемента и поместим две сосредоточенные массы в их середине. На ригеле поместим четыре массы в середине каждого элемента. Все элементы имеют одинаковую длину $L_1/2 = L_2/4$ и одинаковую сосредоточенную массу $m = L_1/2$.

Для получения матрицы податливости построим функцию Грина, пользуясь методом начальных параметров (рис. 1).

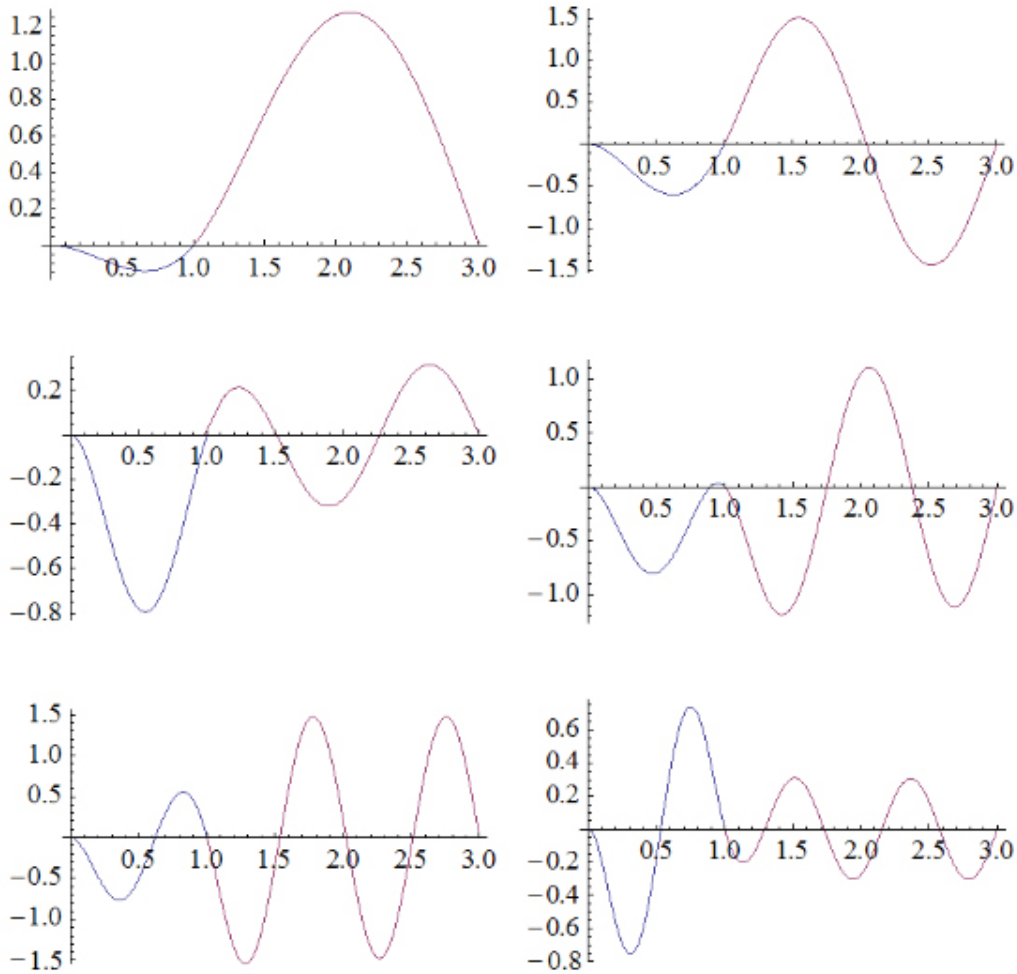


Рис. 2. Формы колебаний Г-образной рамы.
 Fig. 2. The oscillation forms of the G-shaped frame.

$$W_1(\xi) = \frac{L_1^3}{6D_1} \left[-\frac{3M01}{L_1} \xi^2 - Q01\xi^3 + P_1(\xi - \eta)_+^3 \right]; \xi = \frac{x}{L_1}; \eta = \frac{y_1}{L_1}; \quad (2.11)$$

$$W_2(\xi) = \frac{L_2^3}{6D_2} \left[\frac{6\theta02D_2}{L_2^2} \xi - \frac{3M02}{L_2} \xi^2 - Q02\xi^3 + P_2(\xi - \chi)_+^3 \right]; \xi = \frac{x}{L_2}; \chi = \frac{y_2}{L_2};$$

$$w01 = \theta01 = w02 = 0,$$

$$(\xi - \eta)_+^3 = \begin{cases} (\xi - \eta)^3, & \xi \geq \eta \\ 0, & \xi \leq \eta \end{cases}; (\xi - \chi)_+^3 = \begin{cases} (\xi - \chi)^3, & \xi \geq \chi \\ 0, & \xi \leq \chi \end{cases}; 0 \leq \xi, \eta, \chi \leq 1.$$

Остальные начальные параметры определяются из условий контакта и граничных условий рамы на другом конце:

$$W_1(1) = w02 = 0; W_2(1) = 0; M_2(1) = 0; W_1'(1) = \theta02; M_1(1) = M02. \quad (2.12)$$

К сожалению, в общем виде все параметры определить не удастся. Для нашего частного случая все начальные параметры выразим через начальный момент $M01$ и начальную поперечную силу $Q01$ стойки. Из (2.12) найдем

$$\frac{M01}{L_1} = \frac{1}{(4 + 3d_3)} (-P_1(1 - \eta)\eta(2(2 - \eta) + 3d_3(1 - \eta)) + \left(\frac{L_2}{L_1}\right) P_2(2 - \chi)(1 - \chi)\chi);$$

$$Q01 = \frac{1}{(4 + 3d_3)} \left(P_1(4 + 3d_3 - 3(2 + 3d_3)\eta^2 + 2(1 + 3d_3)\eta^3) - 3 \left(\frac{L_2}{L_1} \right) P_2(2 - \chi)(1 - \chi)\chi \right);$$

$$D_2 = D_1 = D; L_2 = 2L_1; M02 = L_1(M01/L_1 + Q01 - P_1(1 - \eta));$$

$$\theta02 = L_1^2/(2D)(-2M01/L_1 - Q01 + P_1(1 - \eta)^2);$$

$$Q02 = 3P_1(d_3(1 - \eta)^2 + (1 - \eta)) \left(\frac{L_1}{L_2} \right) - \frac{3M01}{L_1 \left(\frac{L_1}{L_2} \right) (1 + 2d_3)} - 3Q01 \left(\frac{L_1}{L_2} \right) (1 + d_3) + P_2(1 - \chi)^3;$$

$$d_3 = \frac{D_2 L_1}{D_1 L_2}.$$

Затем, попеременно присваивая $P_1 = 1, P_2 = 0$ и наоборот, придавая переменным ξ, η, χ текущие значения сосредоточенных масс и значений, в которых прикладывается единичная сила, получим матрицу податливости в виде $[F]$ и ее безразмерный аналог $[a]$:

$$[F] = \frac{D}{L_1^3} [a],$$

где $[a] =$

$$\begin{bmatrix} 0,00259677 & 0,00225645 & -0,00174782 & -0,00324596 & -0,00274658 & -0,00104869 \\ 0,00225645 & 0,00579279 & -0,00524347 & -0,00973788 & -0,00823975 & -0,00314608 \\ -0,00174782 & -0,00524347 & 0,0115098 & 0,0239794 & 0,0206909 & 0,00794752 \\ -0,00324596 & -0,00973788 & 0,0239794 & 0,0761552 & 0,0752563 & 0,0300127 \\ -0,00274658 & -0,00823975 & 0,0206909 & 0,0752563 & 0,0961304 & 0,0426229 \\ -0,00104869 & -0,00314608 & 0,00794752 & 0,0300127 & 0,0426229 & 0,0245602 \end{bmatrix}$$

Матрица масс $[M]$ и ее безразмерный аналог $[M_1]$ имеют вид

$$[M] = mL_1 [M_1],$$

$$\text{где } [M_1] = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Отсюда динамическая матрица может быть получена простым перемножением вышеприведенных матриц:

$$[D_d] = [a][M_1].$$

Матрица податливости получилась, как это и должно быть, симметричной. Причем некоторые коэффициенты имеют знак минус. Этот знак зависит от выбора локальных координат. При другом выборе все элементы матрицы могут быть положительными. Проверка показывает, что частота колебаний является инвариантной по отношению к выбору локальных осей координат. Коэффициенты характеристического полинома 6-го порядка также будут содержать 6 инвариантов. Частота колебаний – физическая величина и не зависит от наблюдателя!

Собственные значения Λ динамической матрицы $[D_d]$ связаны с частотой колебаний следующим образом: $\omega = \frac{1}{L_1^2} \sqrt{\frac{D_1}{\Lambda m_1}}$. Откуда коэффициент β_1^2 необходимо сравнивать с $\Lambda^{-0.5}$.

Вычислим собственные значения $\Lambda: \{\Lambda_6, \Lambda_5, \Lambda_4, \Lambda_3, \Lambda_2, \Lambda_1\} = \text{Eigenvalues}[Dd]$:
 $\{0.0932819, 0.0087568, 0.00300994, 0.001681, 0.00102958, 0.000613312\}$.

Коэффициенты частот $\Lambda^{-0.5}$ для 6 сосредоточенных масс (приближенное решение) получат значения:

$\{3.27417, 10.6863, 18.2272, 24.3902, 31.1652, 40.3793\}$.

Соответствующее точное решение β_1^2 для 6 сосредоточенных масс имеет вид:

$\{3.27526, 10.761, 18.3004, 25.1379, 41.3295, 54.903\}$.

Приближенные частоты оказываются ниже: 1-я частота на 0.03 %, 2-я на 0.69 %, 3-я на 0.4 %, 4-я на 3 %, 5-я на 25 %, 6-я – на 26.5 %.

Приближенные частоты, полученные с помощью МКЭ в Ansys, оказываются ниже: 1-я частота на 0.03 %, 2-я на 0.42 %, 3-я на 1.09 %, 4-я на 1.93 %, 5-я на 11.4 %, 6-я – на 16.71 %.

Также хочется отметить, что приближенные частоты получены из СЛАУ разной размерности (для МКЭ она больше, чем для модернизированного метода, более чем в 2.3 раза).

Анализ вычислений для большего числа разбиений стержней (стойки и ригеля) рамы на элементы показывает экспоненциальную сходимость приближенных частот к точным. Например, для коэффициента 2-й собственной частоты колебаний (для коэффициента 1-й собственной частоты колебаний различие и так чрезвычайно мало – 0.03 %) при разбиении массы рамы на 6 элементов, в середине которых помещена 1/6 часть общей массы рамы, погрешность в определении 2-й собственной частоты колебаний рамы всего 0.69 %. А начиная с 18 элементов погрешность составляет менее 0.1 %.

Наибольшее значение сосредоточенных масс (число степеней свободы для нахождения собственных значений) нами было опробовано при $n = 200$, т.е. для матриц с 40 000 элементов, или решение полинома 200-го порядка. К счастью, ПСМ «WolframMathematica» [14] и с этой задачей успешно справился, применив метод итераций матриц Стодолы.

Заключение

В связи с тем, что определение собственных и вынужденных колебаний рамных сооружений, моделируемых стержнями с распределенными массами (бесконечное число степеней свободы) довольно затруднительно, в статье сделана попытка наделить модель сооружения конечным числом степеней свободы: масса помещена в некоторое число узлов, которые упруго взаимодействуют со стержнями рамы, не имеющими массы. Стержни рамы работают только на изгиб.

В статье с использованием функций Грина, матриц жесткости, масс, податливости и др. была решена задача о свободных колебаниях Г-образной рамы. Полученные приближенные результаты при сравнении с малоизвестными точными результатами показали хорошую сходимость, особенно при увеличении числа степеней свободы (количества сосредоточенных масс, моделирующих распределенную массу стержней рамы).

Список литературы

- Хазов П.А., Кожанов Д.А., Анущенко А.М., Сатанов А.А. **2022**. Динамика строительных конструкций при экстремальных природных воздействиях: колебания, прочность, ресурс. Н. Новгород: ННГАСУ, 96 с.
- Виноградов Ю.И., Хохлов С.В., Соколов С.Т. **2019**. Особенности сейсмического мониторинга при ведении взрывных работ вблизи действующего газопровода. *Известия Тульского государственного университета*, 1: 296–305. EDN: YOZCUI
- Мкртычев О.В., Решетов А.А. **2017**. *Сейсмические нагрузки при расчете зданий и сооружений*. М.: Изд-во АСВ, 140 с.
- Литвинова Э.В. **2017**. Определение параметров динамических характеристик колебаний строительных конструкций, зданий и сооружений. *Строительство и техногенная безопасность*, 61(9): 93–99.

5. Сюй Пэйфу (ред.). **2008.** *Проектирование современных высотных зданий*: пер. с кит. М.: Изд-во АСВ, 469 с.
 6. Рашидов Т.Р., Мардонов Б., Мирзаев И. **2018.** О колебаниях подземных трубопроводов под действием сейсмических волн. *Проблемы механики. Узбекский журнал*, 4: 19–23. URL: <https://assets.slib.uz/edition/file/5dfc6907cb26e.pdf>
 7. Господариков А.П., Зацепин М.А. **2019.** Математическое моделирование нелинейных краевых задач геомеханики. *Горный журнал*, 12: 16–20. <https://doi.org/10.17580/gzh.2019.12.03>
 8. Шейн А.И. **2015.** *Динамика и устойчивость сооружений. Обеспечение сейсмостойкости зданий и сооружений*. Пенза: ПГУАС, 108 с.
 9. Еремьянц В.Э., Рудаев Я.И., Тютюкин Г.В. **2014.** *Аналитическая динамика и теория колебаний*: учеб. пособие. Ч. 2. Бишкек: Изд-во КРСУ, 247 с
 10. Гусев А.Ф., Новоселова М.В. **2017.** *Прикладная теория колебаний*. Тверь: Тверской гос. техн. ун-т, 160 с.
 11. Харрис С.М., Крид Ч.И. **1980.** *Справочник по ударным нагрузкам*. Сокр. перевод с англ. Н.А. Пэдуре. Л.: Судостроение, 358 с.
 12. Бабаков И.М. **1958.** *Теория колебаний*: учеб. пособие для высш. техн. учеб. заведений. М.: Гостехиздат, 628 с.
 13. Стеклов В.А. **1927.** *Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений*. М.; Л.: Госиздат, 419 с.
 14. Артюхин Ю.П., Гурьянов Н.Г., Котляр Л.М. **2002.** *Система Математика 4.0 и ее приложения в механике*: учеб. пособие. Казань: Казанское математическое общество: Изд-во КамПИ, 415 с.
 15. Коллатц Л. **1968.** *Задачи на собственные значения (с техническими приложениями)*: перевод со второго нем. изд. Под общ. ред. В.В. Никольского. М.: Наука, 503 с. URL: <http://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Kollatc1968ru.pdf>
 16. Гогенемзер К., Прагер В. **1936.** *Динамика сооружений. Учение о колебаниях применительно к потребностям инженера строителя*. Перевод с нем. А.А. Янсон. Л.; М.: ОНТИ, Гл. ред. строит. лит., 358 с.
 17. Новацкий В. **1963.** *Динамика сооружений*. Перевод с польского Л.В. Янушевича. М.: Госстройиздат, 376 с.
 18. Великанов П.Г., Куканов Н.И., Халитова Д.М. **2021.** Использование непрямого метода граничных элементов для расчета изотропных пластин на упругом основании Винклера и Пастернака–Власова. *Вестник Самарского университета. Естественная серия*, 27(2): 33–47. doi:10.18287/2541-7525-2021-27-2-33-47
- ## References
1. Khazov P.A., Kozhanov D.A., Anushchenko A.M., Satanov A.A. **2022.** [*Dynamics of building structures under extreme natural impacts: vibrations, strength, resource*]. N. Novgorod: NNGASU, 96 p. (In Russ.).
 2. Vinogradov Yu.I., Khokhlov S.V., Sokolov S.T. **2019.** Features of seismic monitoring by explosive works near existing gas pipeline. *Izvestiya Tula State University*, 1: 296–305. (In Russ.). EDN: YOZCUI
 3. Mkrtychev O.V., Reshetov A.A. **2017.** [*Seismic loads in structural engineering*]. Moscow: Publ. House ASV, 140 p. (In Russ.).
 4. Litvinova E.V. **2017.** Determination of parameters of dynamic characteristics of vibrations of building constructions, buildings and structures. *Stroitel'stvo i tekhnologennaya bezopasnost' = Construction and industrial safety*, 61(9): 93–99. (In Russ.). EDN: YSFCJI
 5. Xu Peifu (ed.). **2008.** [*Design of modern high-rise buildings*]. Moscow: Publ. House ASV, 469 p. (In Russ. Transl. from Chinese).
 6. Rashidov T.R., Mardonov B., Mirzaev I. **2018.** About vibrations of underground pipelines under the action of seismic waves. *Problems of Mechanics. Uzbek Journal*, 4: 19–23. (In Russ.). URL: <https://assets.slib.uz/edition/file/5dfc6907cb26e.pdf>
 7. Gospodarikov A.P., Zatsepina M.A. **2019.** Mathematical modeling of boundary problems in geomechanics. *Mining Journal*, 12: 16–20. (In Russ.). <https://doi.org/10.17580/gzh.2019.12.03>
 8. Shein A.I. **2015.** [*Dynamics and stability of structures. Ensuring earthquake resistance of buildings and structures*]. Penza: PGUAS, 108 p. (In Russ.).
 9. Eremyants V.E., Rudaev Ya.I., Tyutyukin G.V. **2014.** [*Analytical dynamics and theory of oscillations*]: Textbook. Pt 2. Bishkek: KRSU Publ. House, 247 p. (In Russ.).
 10. Gusev A.F., Novoselova M.V. **2017.** [*Applied theory of oscillations*]. Tver: Tver State Technical University, 160 p. (In Russ.).
 11. Harris C.M., Creed Ch.I. **1980.** [*Handbook of shock loads*]. Leningrad: Sudostroenie, 358 p. (In Russ.). (Transl. from English: C.M. Harris, Ch.E. Crede (eds). **1976.** *Shock and vibration handbook*. Second ed. New York: McGraw-Hill, 1218 p.)
 12. Babakov I.M. **1958.** [*Theory of oscillations*]: Textbook for higher techn. educational institutions. Moscow: Gostekhizdat, 628 p. (In Russ.).
 13. Steklov V.A. **1927.** [*Fundamentals of the integration theory of the ordinary differential equations*]. Moscow; Leningrad: Gosizdat, 419 p. (In Russ.).
 14. Artyukhin Y.P., Guryanov N.G., Kotlyar L.M. **2002.** [*The Mathematics 4.0 system and its applications in*

- mechanics*]: Textbook. Kazan: Kazan Mathematical Society: Publ. House of CamPI, 415 p. (In Russ.).
15. Collatz L. **1968**. [*The eigenvalue problems (with technical applications)*]: Transl. from German. Moscow: Nauka, 503 p. (In Russ.). URL: <http://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Kollatz1968ru.pdf>
 16. Hohenemser K., Prager W. **1936**. [*Dynamics of structures. The theory of oscillations applied to the needs of a civil engineer*]. Transl. from German by A.A. Yanson. Leningrad; Moscow: ONTI, 358 p. (In Russ.).
 17. Novatsky V. **1963**. [*Dynamics of structures*]. Transl. from Polish by L.V. Yanushevich. Moscow: Gosstroizdat, 376 p. (In Russ.).
 18. Velikanov P.G., Kukanov N.I., Khalitova D.M. **2021**. Use of the indirect boundary elements method for the calculation of isotropic plates on an elastic Winkler base and Pasternak–Vlasov base. *Bulletin of Samara University. Natural Science Series*, 27(2): 33–47. (In Russ.). doi:10.18287/2541-7525-2021-27-2-33-47

Об авторах

Великанов Петр Геннадьевич (<https://orcid.org/0000-0003-0845-2880>), кандидат физико-математических наук, доцент, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, pvelikanov@mail.ru

Артюхин Юрий Павлович (<https://orcid.org/0000-0002-6243-9145>), доктор физико-математических наук, профессор, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, ArtukhinYP@mail.ru

About the Authors

Velikanov, Peter G., Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan; Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, pvelikanov@mail.ru

Artyukhin, Yury P., Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, ArtukhinYP@mail.ru

Поступила 7.04.2023

Принята к публикации 21.05.2023

Received 7 April 2023

Accepted 21 May 2023